

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

**Сборник материалов IX Республиканской научной конференции
молодых ученых и студентов
19–21 ноября 2015 года**

Брест 2015

УДК 004+51+62+68+69
ББК 22.11/.19+32.97

Программный комитет конференции:

Председатель: Рубанов В.С. - к.ф.-м.н., доцент (БрГТУ).

Зам. председателя: Головкин В.А. - д.т.н., профессор (БрГТУ),
Ракецкий В.М. - к.ф.-м.н., доцент (БрГТУ).

Члены: Голенков В.В. - д.т.н., профессор (БГУИР), Дудкин А.А. - д.т.н., доцент (ОИПИ НАНБ), Старовойтов В.В. - д.т.н., профессор (ОИПИ НАНБ), Калинин А.И. - д.ф.-м.н., профессор (БГУ), Лазаквич Н.В. - д.ф.-м.н., профессор (БГУ), Мазаник С.А. - д.ф.-м.н., профессор (БГУ), Дереченник С.С. - к.т.н., доцент (БрГТУ), Махнист Л.П. - к.т.н., доцент (БрГТУ), Парфомук С.И. - к.т.н., доцент (БрГТУ), Матысик О.В. - к.ф.-м.н., доцент (БрГУ им. А.С. Пушкина), Чичурин А.В. - д.ф.-м.н. (Украина), профессор (БрГУ им. А.С. Пушкина).

Редакционная коллегия:

Главный редактор: Рубанов В.С. - к.ф.-м.н., доцент.

Зам. главного редактора: Головкин В.А. - д.т.н., профессор.

Члены редакционной коллегии: Ракецкий В.М. - к.ф.-м.н., доцент, Дереченник С.С. - к.т.н., доцент, Махнист Л.П. - к.т.н., доцент, Парфомук С.И. - к.т.н., доцент, Муравьев Г.Л. - к.т.н., доцент, Матысик О.В. - к.ф.-м.н., доцент, Чичурин А.В. - д.ф.-м.н. (Украина), профессор.

Рецензенты:

кафедра прикладной математики и технологий программирования БрГУ им. А.С. Пушкина;
Трофимук А.А., к.ф.-м.н., доцент

Современные проблемы математики и вычислительной техники : сборник материалов IX Республиканской научной конференции молодых ученых и студентов, Брест, 19- 21 ноября 2015 г. / Брестский государственный технический университет ; редкол.: В.С. Рубанов (гл.ред.) [и др.]. - Брест : БрГТУ, 2015. - 108 с.

ISBN 978-985-493-343-6

В сборнике представлены материалы докладов по современным проблемам интеллектуальных технологий обработки данных в научных и прикладных исследованиях, робототехники, моделирования нелинейных динамических процессов, аналитических и численных методов исследований в математике и их приложениях.

Конференция проводится при поддержке проекта TEMPUS 544137-TEMPUS-1-2013-1-SK-TEMPUS-JPHS «Centers of Excellence for young REsearchers (CERES)» в целях улучшения условий для научно-исследовательской работы молодых ученых из университетов Республики Беларусь. Информационную поддержку конференции оказывает Центр передового опыта для молодых ученых БрГТУ <http://ceres.bstu.by>.

УДК 004+51+62+68+69
ББК 22.11/.19+32.97

ISBN 978-985-493-343-6

© «Издательство БрГТУ», 2015

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ РОБОТОТЕХНИКИ АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

UDK 004.9

COMPUTER NETWORK SECURITY APPROACH BASED ON MULTI-AGENT DYNAMIC RECOGNITION

Leanid Vaitsekhovich

Intelligent Information Technology Department, Brest State Technical University, Brest

In this article a multi-agent model of intrusion detection system have been addressed. The integration of an Artificial Immune System and Neural Networks in the role of detectors permits to increase flexibility and overall performance of the system. The detector structure is based on two different neural networks namely NPCA and MLP. The model is able to perform a classification of network intrusions by classes as well as by types.

Keywords - Intrusion Detection, Neural Network, Artificial Immune System, Principal Component Analyses, Multi-agent System.

Introduction

Computer network security is one of the most significant problems today. Its importance is growing with the development of Internet and computer computational power.

There are two main intrusion detection techniques: misuse detection and anomaly detection. Misuse detection systems (for example, STAT and IDIOT [1]) use patterns of well-known attacks.

Anomaly detection systems [2] flag observed activities that deviate significantly from the established normal usage profiles as anomalies, that is, possible intrusions.

Neural Network Agent

Network intrusions are usually generalized into four classes such as DoS, probing, U2R, R2L [3]. Each attack class consists of different attack types.

As an agent (detector) of the Intrusion Detection System (IDS) we use the integration of NPCA (Nonlinear Principal Component Analysis Neural Network) and MLP (Multilayer perceptron), which are connected consequently (figure1) [4].

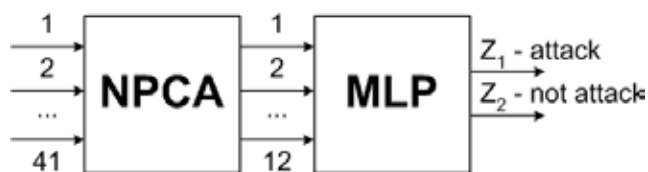


Figure 1 – A single agent (detector) structure

41 features from KDD-99 dataset are used as an input instance. Each input contains TCP-connection information [3]. NPCA transforms the 41-dimensional input vectors into the 12-dimensional output vector. MLP performs the processing of the compressed data to recognize attacks or normal transactions.

Artificial immune system

Experts working in the area of Artificial Immune Systems (AIS) mark out a few fundamental properties of the approach:

- Firstly, AIS are distributed;
- Secondly, AIS are self-organizing.

Biological immune systems are too complicated with a lot of complex protecting mechanisms. But constructing a multi-agent system for intrusion detection only the basic principles and mechanisms can be used such as: generation and training of structurally diverse detectors, selection of appropriate detectors, ability of detectors to find out abnormal activity, cloning and mutation of detectors, forming of immune memory.

Let's consider a generalized structure of the multi-agent IDS shown in figure 2.

A collection of the immune detectors makes up a population that circulates in a computer system and performs recognition of network attacks. It is possible to generate hundreds and thousands of the detectors each of them is responsible for a definite attack type.

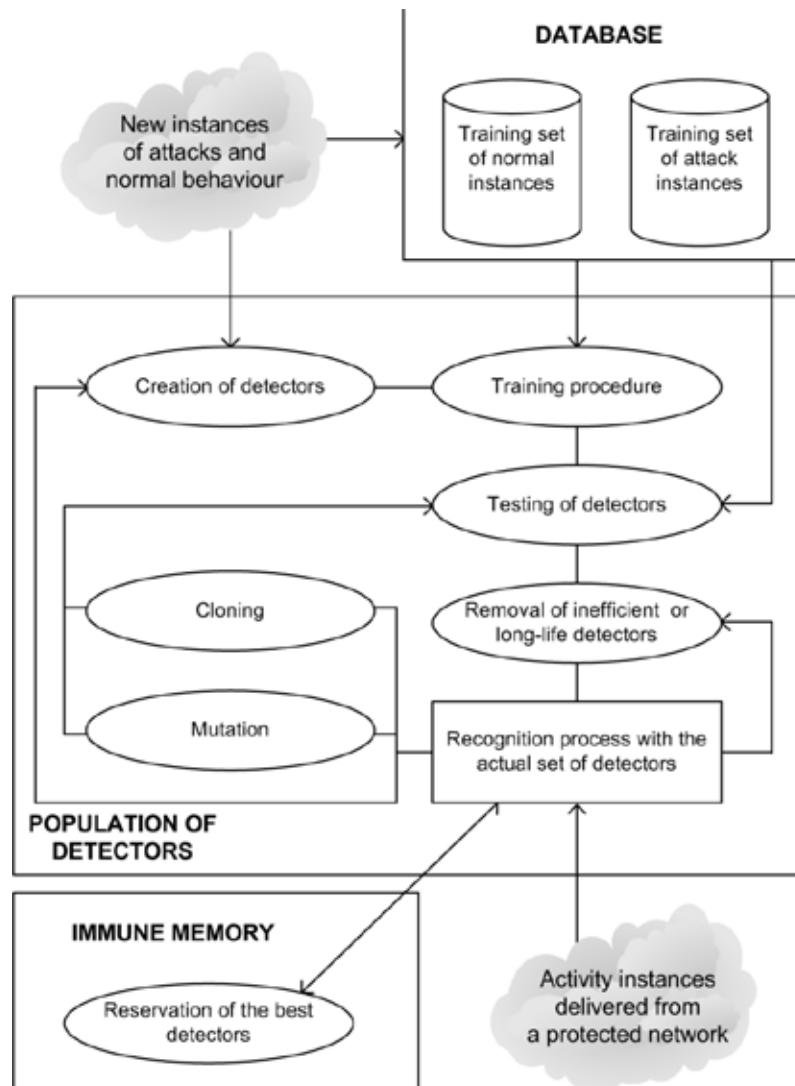


Figure 2 – Simplified multi-agent AIS structure

The procedure of building and performance of the neural network immune system can be represented as follows:

1. Generate an initial population of the detectors. It should be noted that each detector represents a neural network with random weights:

$$D = \{ D_i, \quad i = \overline{1, r} \}, \tag{1}$$

where D_i is i -th neural network immune detector, r is the number of detectors.

2. Train the neural network immune detectors. A training data set is generated by random way from normal and attack instances from the database. After the training a certain amount of the detectors is obtained, which is used in the testing stage.

3. Select the best neural network detectors. The goal of this process is to eliminate bad (unsuitable) detectors that are insufficient for detection and recognition. Each detector is verified using a test data set. As a result the total mean square error E_i is determined for each single detector. The detectors with zero mean square error should be selected:

$$D_i = \begin{cases} 0, & \text{if } E_i = 0 \\ D_i, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2)$$

where 0 characterizes deletion of a detector.

4. Each detector get lifetime and is chosen when the next input instance is supplied to be inspected.

5. Each detector scans the instance. As a result the output values of the detectors Z_{i1}, Z_{i2} , where $i=1...r$, are defined.

6. If i -th detector does not detect an attack in a scanning instance, i.e. $Z_{i1}=0$ and $Z_{i2}=1$, then it chooses the next instance for inspection. If the lifetime of a detector is ended, it is eliminated from the detectors set and a new detector is created.

7. If i -th detector detects an attack in the input, i.e. $Z_{i1}=1$ and $Z_{i2}=0$, then it activates alarm. In this case cloning and mutation of the given detector is performed. As a result a set of clones is generated and each clone is trained by using the detected intrusion. Finally we can get a set of clones, which is aimed to detect the given activity.

8. Select the best clone detectors, which are most suitable to detect this malicious activity. The mean square error for each clone is calculated, using the detected attack. If $E_{ij} > E_i$, then a detector has passed selection. Here E_{ij} – means a square error for j -th clone of i -th detector.

9. Creation of the immune memory. The best neural network detectors are defined, which have shown perfect results during detection of given computer attacks. The detectors of the immune memory exist in the system for a long time and provide the protection against repeated attacks.

Theoretically, the number of the detectors in the system is not limited and their number can be easily varied, but in the real world problems with computational resources such as operative memory, speed etc..., arise.

Experimental results

The results of experiments are discussed in this section. We used data presented in table 1 for training and testing. Table 2 shows the classification results.

In comparison with architectures of intrusion detection systems proposed in our earlier works [4, 5], it becomes possible to increase the accuracy of the proposed architecture to 0.92 as it is shown in table 3.

Table 1 – The training and testing sets

	DoS	U2R	R2L	Probe	Normal	total count
training set	3571	37	278	800	1500	6186
testing set	391458	52	1126	4107	97277	494020

Table 2 – Attack classification with the multi-agent system

class	count	detected	recognized
DoS	391458	386673 (98.78%)	368753 (94.20%)
U2R	52	47 (90.39%)	45 (86.54%)
R2L	1126	1097 (97.42%)	930 (82.59%)
Probe	4107	4066 (99.00%)	4016 (97.78%)
Normal	97277	---	82903 (85.22%)

Table 3 – Some common characteristics

true positive rate	true negative rate	accuracy
0.94	0.85	0.92

Conclusion

In this paper we propose a multi-agent intrusion detection system that organizes joint work of a set of the neural network detectors on the bases of the artificial immune system mechanisms. The detector structure is represented by the integration of two different neural networks namely NPCA and MLP. The model is able to perform a classification of network intrusions by classes as well as by types and cuts down false positives.

Bibliography

1. A software architecture to support misuse intrusion detection / S. Kumar, E.H. Spafford // In Proceedings of the 18th National Conference on Information Security, 1995. – P. 194–204.
2. Animesh, Patcha An overview of anomaly detection techniques: existing solutions and latest technological trends / Patcha Animesh, Park Jung-Min // Computer Networks – 2007. – № 51. – P. 3448–3470.
3. 1999 KDD Cup Competition - Information on: <http://kdd.ics.uci.edu/database/kddcup99/kddcup99.html>.
4. Golovko, V. Dimensionality Reduction and Attack Recognition using Neural Network Approaches / V. Golovko, L. Vaitsekhovich, P. Kochurko, U. Rubanau // In Joint Conference on Neural Networks (IJCNN-2007). – Orlando, FL, USA, 2007. – P. 2734–2739.
5. Vaitsekhovich, L. Multiagent Intrusion Detection Based on Neural Network Detectors and Artificial Immune System / L. Vaitsekhovich, V. Golovko, U. Rubanau // In 10th International Conference on Pattern Recognition and Information Processing (PRIP-2009). – Minsk, Belarus, 2009. – P. 285–289.

УДК 004.8.032.26

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОБРАБОТКИ ЭЛЕКТРОЭНЦЕФАЛОГРАММ ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ ЭПИЛЕПСИИ

Артеменко С.В.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Введение

Разработано множество методов для изучения и анализа сигналов электроэнцефалограмм (ЭЭГ) с целью выявления патологических изменений мозга во время эпилептических припадков [1, 2]. Многие из этих методов уже используются в клиниках, однако являются малоэффективными. Для автоматического обнаружения эпилептической активности по сигналам ЭЭГ в основном используются линейные (частотно-временные, математические и статистические) методы, в которых не учитывается нелинейность исследуемого сигнала.

Несмотря на проведение широких исследований в области анализа ЭЭГ, самым эффективным считается метод визуальной оценки. При этом даже опытные врачи расходятся во мнении, принимая один и тот же паттерн за аномальную активность либо за артефакт.

Исследования ЭЭГ сигналов показали, что они являются нестационарными и хаотическими [3]. ЭЭГ описывает поведение сложной динамической системы, и характер нормальной активности сигналов является хаотическим, поэтому применение линейных методов анализа является малоэффективным [3].

1. Методы выявления патологической активности в ЭЭГ сигналах

Существующие методы детектирования эпилептической активности в сигналах ЭЭГ можно разделить на несколько основных категорий:

Метод визуальной оценки. Несмотря на проведение широких исследований в области анализа ЭЭГ, самым распространенным является метод визуальной оценки [1]. Однако такая методология не лишена субъективности.

Анализ временных характеристик (периодометрический анализ). Данный метод предполагает использование статистического анализа отдельных частей ЭЭГ и расчет временных характеристик сигналов. Автоматический сбор статистики используется только в качестве дополнительного метода для обнаружения отклонения распределения амплитуд и частот от предполагаемой нормы.

Спектральный анализ. В данном подходе используется разделение ЭЭГ сигнала на компоненты различных частот. Данный метод имеет существенный недостаток – высокая чувствительность к шумам.

Нелинейная обработка. Существует ряд направлений исследования характеристик ЭЭГ, которые используют методы нелинейной обработки данных. Одним из них является вейвлет-анализ. Использование вейвлет-анализа требует применения методов распознавания образов, которые получаются в результате преобразования. Для классификации этих образов применяются пороговое детектирование, нейронные сети и другие подходы. Также входными данными для классификации могут быть как сигналы ЭЭГ, так и различные характеристические величины, рассчитанные по ЭЭГ данным.

Другой подход основан на исследовании ЭЭГ сигнала как хаотического процесса. Существует разница в динамических свойствах ЭЭГ сигнала в нормальном и эпилептическом состоянии. При возникновении во время регистрации ЭЭГ всплеск эпилептической активности отмечается снижением сложности сигнала, что приводит к снижению хаоса [3]. Для оценки таких изменений возможно применение теории хаоса и нелинейной динамики. В качестве характеристических величин применимы корреляционная размерность аттрактора и старший показатель Ляпунова.

2. Нейросетевой анализ ЭЭГ

Приведем нейросетевой алгоритм работы системы с кратким описанием используемых методов для обработки сигнала ЭЭГ [3]:

1) Исходная группа ЭЭГ сигналов обрабатывается при помощи метода независимых компонент (The Independent Component Analysis – ICA). Этот метод позволяет отфильтровать электрическую активность головного мозга от шумов и артефактов. В результате анализа выделяется один полезный ЭЭГ сигнал для последующей обработки.

2) Полученный на этапе 1) сигнал подвергается адаптивной сегментации при помощи прогнозирующей искусственной нейронной сети (ИНС). Так как сигналы ЭЭГ являются нестационарными, то данный подход позволяет получить последовательность сегментов, где в рамках каждого сегмента данные можно считать стационарными.

3) При помощи прогнозирующей ИНС производится оценка старшего показателя Ляпунова на каждом из сегментов. В результате получаем детерминированный ряд $\lambda(t) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$, где N – количество сегментов.

4) Согласно критерию (1): если значение $\lambda > 0$, то фиксируется нормальная активность в сегменте, иначе при $\lambda \leq 0$ фиксируется эпилептическая активность. Таким образом в ходе анализа ряда $\lambda(t)$ определяется наличие эпилептической активности в каждом из полученных сегментов:

$$\begin{cases} \lambda > 0, & \text{нормальная активность} \\ \lambda \leq 0, & \text{эпилептическая активность} \end{cases} \quad (1)$$

По результатам исследований автора [3] наилучшие результаты для рассматриваемой задачи получаются при использовании многослойного персептрона с сигмоидной функцией активации в скрытом слое.

3. Результаты экспериментов

Экспериментальное исследование проводилось на 48 наборах ЭЭГ сигналов (регистраций), записанных у 20 пациентов различного возраста. Каждая регистрация представляла собой 16-канальную ЭЭГ (см. рисунки 4.14, 4.15) длительностью по 8 секунд. Из 16

сигналов, каждой регистрации в результате ICA было получено 6 сигналов, таким образом, всего было проанализировано 288 сигналов.

По результатам исследований получено, что точность классификации предложенного нейросетевого алгоритма на основе оценки хаотичности ЭЭГ сигнала составляет 99,6 %.

Сравним данный результат с другими рассмотренными методиками. Визуальный анализ (ВА) в среднем позволяет корректно идентифицировать эпилептическую активность в 80% случаях [1]. Вейвлет-преобразование ЭЭГ данных с последующим применением порогового детектирования дает результат обнаружения 70%. Вейвлет-преобразование с использованием в качестве классификатора многослойного персептрона выполняет классификацию данных ЭЭГ верно в 85% случаев. Классификация многослойным персептроном (МП) данных ЭЭГ в исходном виде дает результат в 62%. При предварительном расчете ряда характеристических величин, которые являются входными данными для классификатора на основе многослойного персептрона, правильная классификация составляет 68,5%. Если набор характеристических величин поступает на вход нейросетевого классификатора на основе сети с радиально-базисной функцией активации, то классификация составляет 99,3% правильного соотнесения фрагментов с классами [2].

Выводы

Представлено описание нейросетевого алгоритма для анализа ЭЭГ с целью обнаружения эпилептической активности.

Проведены экспериментальные исследования и сравнительный анализ различных методик анализа ЭЭГ. Данные эксперименты показали, что предложенный алгоритм обработки ЭЭГ и обнаружения эпилептической активности является очень эффективным с высокой точностью классификации 99,6%.

Список цитированных источников

1. Ghosh-Dastidar, S. Principal Component Analysis-Enhanced Cosine Radial Basis Function Neural Network for Robust Epilepsy and Seizure Detection / S. Ghosh-Dastidar, H. Adeli, N. Dadmehr // Biomedical Engineering: IEEE Transactions. – NY: IEEE, 2008. – Vol. 55. – P. 512–518.
2. Walczak, S. An Artificial Neural Network Approach to Diagnosing Epilepsy Using Lateralized Bursts of Theta EEGs / S. Walczak, W.J. Nowack // Journal of Medical Systems. – Netherlands: Springer, 2001. – V. 25(1). – P. 9–20.
3. Лаврентьева, С.В. Диагностическая экспериментальная система для анализа эпилептической активности по данным электроэнцефалограммы / С.В. Лаврентьева, О.В. Кистень, В.А. Головкин, В.В. Евстигнеев // Новости медико-биологических наук. – Минск, 2010. – № 1(1). – С. 114–123.

УДК 004.89

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ СИСТЕМА АНАЛИЗА ОФОРМЛЕНИЯ ТЕКСТОВЫХ ДОКУМЕНТОВ В ФОРМАТЕ DOCX

Гилевский К.А.

*Гомельский государственный университет имени П.О. Сухого, г. Гомель
Научный руководитель: Курочка К.С., к.т.н., доцент*

В современном мире все больше проявляется тенденция к повсеместному использованию электронных документов и отказу от традиционных «бумажных».

Очевидно, что при таком положении дел важно учитывать стандарты оформления документов (регламентированные соответствующими органами или внутри организации). Однако проверка таких параметров как размер литер, используемый шрифт, величина отступов является трудоемкой и рутинной работой, требующей больших временных затрат. Приложение, позволяющее производить проверку документов, с целью нахождения различных ошибок в их оформлении, на основе правил, полученных при анализе образцового документа, позволило бы снизить расходы времени и повысить производительность организаций и предприятий, в которых имеет место проверка оформления документов.

При проектировании приложения для анализа был выбран формат текстовых документов docx. Важно отметить, что при использовании набора макрорасширений системы компьютерной верстки LaTeX пользователь жестко задает правила оформления и потому ошибка исключена [1], однако, пусть формат docx не имеет подобного функционала, он обладает большой популярностью и, являясь стандартом де-факто, повсеместно используется в документообороте. При этом данный формат, благодаря внутренней структуре, основанной на xml документах [2], является одним из самых удобных для анализа оформления и внутренней структуры.

Для анализа документов предусмотрено обучение системы на основе документа-образца. Алгоритм работы приложения состоит из пунктов:

- задание документа-образца;
- анализ документа-образца;
- запись правил в установленном формате в файл;
- указание файла с правилами и тестируемого документа;
- анализ входного документа;
- вывод установленных несоответствий с правилами.

На этапе непосредственного анализа текстового документа проверка на условие соответствия тому или иному правилу осуществляется каскадно. Каскадирование позволяет использовать распараллеливание данного процесса, что способно существенно повысить эффективность приложения, учитывая высокую популярность систем параллельного вычисления.

Целесообразно привести диаграмму вариантов использования, описывающую сущности, которые взаимодействуют с системой тем или иным образом, и функционал, который реализует система (рисунок 1).

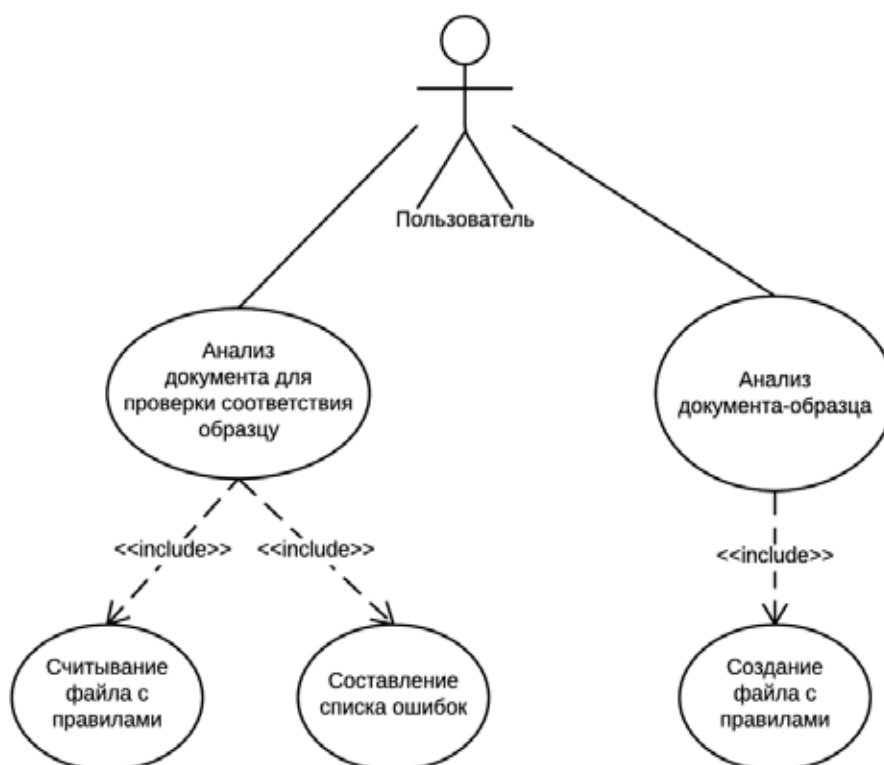


Рисунок 1 – Диаграмма вариантов использования приложения

Ошибки отображаются в виде примечаний к конкретным частям текста, которые содержат данное несоответствие. Снимок экрана, содержащий описания ошибок, расположен на рисунке 2.

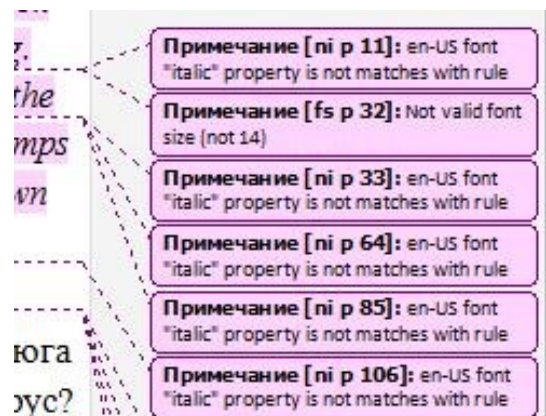


Рисунок 2 – Список несоответствий проверенного документа правилам оформления

Среди преимуществ приложения можно отметить: возможность реализации мульти-процессорной обработки для увеличения эффективности работы приложения, широкий круг потенциальных пользователей, удобство пользования, благодаря использованию популярного формата текстовых документов docx, интеллектуальное обучение на основе заранее подготовленного образца, а также высокую гибкость при ручной настройке файла, содержащего правила оформления для проверки документов.

Список цитированных источников

1. Балдин, Е.М. Компьютерная типография LaTeX [Текст]: учебное пособие / Е.М. Балдин. – СПб.: Изд-во «БХВ-Петербург», 2008. – 304 с.
2. Standard ECMA-376 Office Open XML File Formats [Электронный ресурс] // Standard ECMA-376: [сайт]. – Электрон. текстов. дан. – [Б.м.], 2012. – Режим доступа: <http://www.ecma-international.org/publications/standards/Ecma-376.html>. – Загл. экрана.

УДК 004.056.2

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ДЕКОДИРОВАНИЯ БЛОЧНЫХ КОДОВ

Драко А.М.

Белорусский государственный технологический университет, г. Минск

Увеличение количества потребителей информации приводит к необходимости увеличения пропускной способности каналов, а также к увеличению помех в уже используемых системах передачи. Серьезной проблемой становится защита каналов связи от помех. Одним из наиболее удачных методов защиты от помех является помехоустойчивое кодирование.

За более чем 70 лет существования помехоустойчивого кодирования было создано множество методов кодирования информации, однако основную нагрузку испытывает декодер. Сейчас существует множество способов получить от стандартного кода больше, чем в него было заложено изначально. Одним из примеров является «мягкое» декодирование, которое позволяет обнаружить и исправить большее количество ошибок, чем стандартные методы декодирования. Современная наука ищет новые подходы к декодированию, и одним из таких подходов может стать использование нейронных сетей.

Нейронные сети стали эталоном алгоритмов для решения нестандартных задач, таких как аппроксимация и распознавание образов. Одной из таких задач может стать декодирование линейных блочных кодов. Декодирование можно рассматривать как процесс перехода от вторичного отображения сообщения к первичному алфавиту. Фактически оно сводится к задаче классификации или определении принадлежности входного образа, представленного вектором признаков, к одному или нескольким предварительно определенным классам.

При конструировании нейронного декодера необходимо решить ряд задач. Правильный выбор объема сети имеет большое значение. Построить небольшую и качественную модель часто бывает просто невозможно, а большая модель будет просто запоминать примеры из обучающей выборки и не производить аппроксимацию, что, естественно, приведет к некорректной работе классификатора. Существуют два основных подхода к построению сети – конструктивный и деструктивный. При первом из них вначале берется сеть минимального размера, и постепенно увеличивается до достижения требуемой точности. При деструктивном подходе вначале берется сеть завышенного объема, и затем из нее удаляются узлы и связи, мало влияющие на решение. Число примеров в обучающем множестве должно быть больше числа настраиваемых весов. Иначе вместо обобщения сеть просто запомнит данные и утратит способность к классификации – результат будет неопределенный для примеров, которые не вошли в обучающую выборку. В нашем случае количество примеров имеет строго ограниченный характер и определено количеством информационных символов в сообщении. Поэтому объем сети имеет строго определенный размер.

При выборе архитектуры сети обычно опробуется несколько конфигураций с различным количеством элементов. При этом основным показателем является объем обучающего множества и обобщающая способность сети. Наиболее известными нейронными сетями являются сети обратного распространения, сети Ворда, а также случайные нейронные сети Геленбе. При использовании различной архитектуры сети нейронная сеть может обнаружить и исправить разный тип ошибок, что обязует при разработке нейронного декодера использовать все архитектуры сети. Тогда по полученным статистическим данным можно будет сказать, для каких условий подходит использование того или иного нейронного декодера.

Работа с данными в нейронной сети сводится к составлению примеров из закодированного сообщения и ожидаемых выходных значений сети, что является обучающим множеством. Тестовым множеством будет выступать набор переданных по каналу связи сообщений, содержащие различные типы ошибок, такие как одиночные и группирующиеся.

Для нейронной сети необходимо выбрать систему признаков, характерных для данной задачи, и преобразовать данные соответствующим образом для подачи на вход сети. Однако в случае переданного сообщения мы подаем на вход отдельные битовые значения, что не требует дополнительной нормировки.

В зависимости от системы кодирования выходным значением может быть класс или исходное информационное сообщение. Наиболее простым способом представления выходных данных в таком случае является вектор, компоненты которого соответствуют различным номерам классов, при этом сеть будет иметь число выходов, соответствующее числу классов. Более сложным будет выходной вектор, представляющий собой номер кластера, записанный в двоичной форме, что позволяет уменьшить количество выходов, и одновременно результат будет соответствовать декодированному сообщению.

Топология сети должна соответствовать двум критериям. Первым критерием выступает минимизация количества нейронов, так как передача данных в сетях требует максимальной скорости декодирования. Входной слой нейронов состоит из N нейронов, равный количеству бит переданного сообщения. Выходной слой в целях минимизации будет равен количеству бит требуемых для записи номера кластера в двоичной форме.

Так как в нейронной сети будет использоваться двоичная форма представления данных, то в качестве функции активации нейронов можно использовать «единичный скачок» или «гистерезис». Однако предпочтительно использование сигмоидальной функции в пределах от 0 до 1. В случайных нейронных сетях Геленбе не используется понятие «функции активации», что делает их более универсальными и не требует изучения влияния различных активационных функций.

Алгоритм обучения сети в задачах классификации всегда является обучением с учителям. Переданным по каналам связи сообщениям задаются ожидаемые результаты в соответствии от системы кодирования выходных значений.

Оптимизация нейронного декодера весьма затруднительна в условиях однозначного количества факторов, влияющих на решение сети. Уменьшить топологию сети за счет уменьшения входных данных невозможно, однако при использовании сети Ворда или двух параллельных нейронных сетей и рассмотрения отдельно информационных и контрольных бит переданного сообщения можно добиться уменьшения количества связей в нейронной сети, что означает меньшее количество операций или большую скорость декодирования сетью.

Нейронный декодер является малоизученным методом, который только начинает свое развитие, что открывает широкие возможности для его дальнейшего изучения. Одним из важнейших его преимуществ перед другими типами декодеров является универсальность использования его с любыми линейными блочными кодами. Для работы с другим кодом необходимо только подстроить количество нейронов под переданное сообщение и выходные данные, а также провести новое обучение сети. Также нельзя не отметить, что нейронная сеть может работать параллельно, что во много раз увеличивает скорость ее работы. Суммируя вышесказанное, можно сказать, что нейронный декодер при детальном изучении и развитии может стать одним из наиболее востребованных декодеров в современном помехоустойчивом кодировании.

УДК 004.032.26

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ГЛУБОКОГО ДОВЕРИЯ В ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ ДАННЫХ

Крощенко А.А.

Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Головки В.А., д.т.н., профессор

Введение

Наиболее известным и широко используемым на текущий момент подходом в обучении нейронных сетей глубокого доверия является метод, предложенный Дж. Хинтоном в 2006 году [1]. Ключевой идеей этого метода является использование «жадного» алгоритма послойного обучения (greedy layer-wise algorithm).

Нами был предложен и исследован альтернативный метод послойного предобучения нейронных сетей глубокого доверия, базирующийся на минимизации суммарной квадратичной ошибки восстановления образов на каждом слое [2]. Функция ошибки определяется согласно формуле (1):

$$E_s = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^k \left(y_j^l(p) - y_j^l(p-1) \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^k \left(x_i^l(p) - x_i^l(p-1) \right)^2, \quad (1)$$

где L – количество входных образов, m – количество нейронов в скрытом слое, n – количество нейронов в видимом слое, k – стадийность метода.

В случае CD-1 суммарная квадратичная ошибка примет вид:

$$E_s = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^m \left(y_j^l(1) - y_j^l(0) \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^n \left(x_i^l(1) - x_i^l(0) \right)^2. \quad (2)$$

Правило модификации весов нейронной сети глубокого доверия имеет вид:

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) - \alpha \left(\sum_{p=1}^k (y_j(p) - y_j(p-1)) x_i(p) F'(S_j(p)) + (x_i(p) - x_i(p-1)) y_j(p-1) F'(S_i(p)) \right).$$

В процессе исследования метода была проведена сравнительная оценка классического и предложенного метода на трех задачах: сжатия данных, распознавания выборки MNIST и распознавания выборки CIFAR-10.

Сжатие данных

Рассмотрим систему, генерирующую зашумленные данные [3], вида

$$\begin{cases} x_1 = \sin(\pi t) + \mu \\ x_2 = \cos(\pi t) + \mu \\ x_3 = t + \mu \end{cases},$$

где t – равномерно распределенная случайная величина из интервала $[-1, 1]$, а μ – гауссовый шум с математическим ожиданием 0 и среднеквадратическим отклонением, равным 0,05.

В качестве обучающей и тестирующей выборок нами использовались данные, генерируемые представленной системой (по 1000 образов на каждый тип выборки).

Для экспериментальной проверки предложенного подхода обучался семислойный автоэнкодер (рисунок 1).

Мы использовали сигмоидную функцию активации на всех слоях. Результаты, полученные при тестировании подходов, представлены в таблице 1. MSE определяет ошибку обучения, MS – ошибку обобщения.

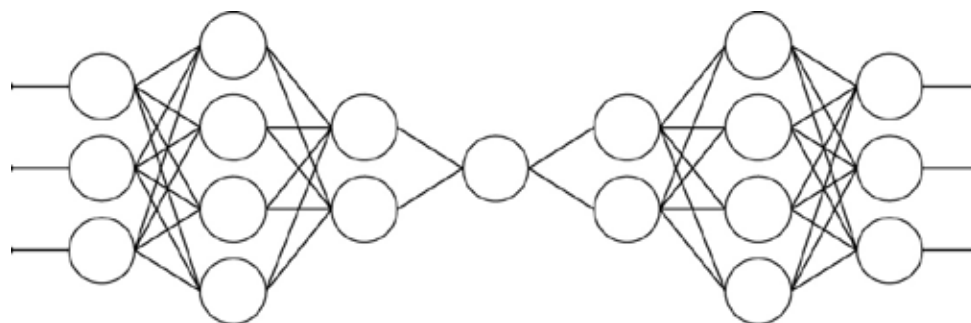


Рисунок 1 – Семислойный автоэнкодер

Таблица 1 — Результаты тестирования методов

Процедура обучения	к для CD-k	MSE	MS
RBM	1	0,699	0,886
	5	0,710	0,932
	10	0,689	0,916
	15	0,688	0,873
REBA	1	0,673	0,851
	5	0,719	0,966
	10	0,677	0,907
	15	0,700	0,895

Выборка MNIST

Элементы этой выборки представляют собой изображения рукописных цифр. MNIST является стандартом при тестировании систем распознавания образов, а также широко используется для обучения и тестирования алгоритмов машинного обучения.

Выборка MNIST состоит из 60000 образов для обучения и 10000 образов для тестирования.

Основной моделью, используемой нами для построения системы распознавания образов, является многослойный перцептрон архитектуры 784-500-500-250-100-10. Количество входов НС определялось размерами образов из базы MNIST (28X28), количество слоев и нейронов в каждом слое выявлялось экспериментальным путем.

Результаты экспериментов на выборке MNIST представлены в таблице 2. MSE_{tr} определяет ошибку обучения, MSE_{test} – ошибку обобщения, Эффективность, % – процент правильно распознанных изображений.

Таблица 2 — Результаты тестирования методов (MNIST)

Процедура обучения	MSE_{tr}	MSE_{test}	Эффективность, %
RBM	0,024	0,028	97,5/96.68
REBA	0,022	0,026	97,62/96.75

Выборка CIFAR-10

Выборка CIFAR-10 состоит из 60000 цветных изображений размером 32X32 пикселя. Каждое изображение относится к определенному классу (самолет, автомобиль, птица, собака и т.д.). Общее количество классов – 10, таким образом, в выборке содержится по 6000 изображений каждого класса. Вся выборка делится на обучающую часть (50000 образов) и тестовую (10000 образов). Нами была использована часть обучающей выборки CIFAR-10 (30000 образов).

Для выполнения сравнительного анализа методов предобучения использовалась нейронная сеть глубокого доверия с архитектурой 3072-1024-500-250-100-10. Результаты, полученные при проведении тестов, представлены в таблице 3.

Таблица 3 — Результаты тестирования методов (CIFAR-10)

Процедура обучения	MSE_{tr}	MSE_{test}
RBM	0,2370	0,4012
REBA	0,2422	0,3917

Список цитированных источников

1. Hinton, G.E. A fast learning algorithm for deep belief nets / G.E. Hinton, S. Osindero, Y. Teh // Neural Computation, 18. – 2006. – P. 1527–1554.
2. Golovko, V.A. Learning Technique for Deep Belief Neural Networks / V. Golovko, A. Kroshchanka, U. Rubanau, S. Jankowski // in book Neural Networks and Artificial Intelligence. – Springer, 2014. – Vol. 440. Communication in Computer and Information Science. – P. 136–146.
3. Scholz, M. Nonlinear principal component analysis: neural network models and applications / M. Scholz, M. Fraunholz, J. Selbig // Principal Manifolds for Data Visualization and Dimension Reduction. – Springer, 2008. – P. 44–67.

УДК 004.89

СИСТЕМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОРТА РАСТЕНИЯ ПО ФОРМЕ ЛИСТА

Постоялкин Д.С., Полейчук В.А.

*Гомельский государственный университет имени П.О. Сухого, г. Гомель
Научный руководитель: Курочка К.С., к.т.н., доцент*

Система определения сортов растений необходима для правильного ухода за тем или иным растением, а именно: подбор почвы, подбор количества и консистенции удобрений, системы полива и т.д. Также наличие этой системы позволяет убрать необходимость в специалисте в данной области.

Для идентификации растения предлагается использовать их листья, так как они всегда присутствуют. Использование плодов для определения сорта растения не является эффективным, так как плоды на различных растениях созревают в разное время и не всегда могут быть.

Для определения сорта растения можно использовать следующие признаки: геометрические характеристики (площадь, периметр, отношение площади к периметру), цветовые характеристики (цветовой тон, насыщенность и яркость), распределение пикселей изображений.

Для более точного определения объекта лучше использовать каскадный классификатор. Под каскадным классификатором понимается метод, при котором заданное множество последовательно делится на подчиненные подмножества, постепенно конкретизируя объект классификации. При этом основанием деления служит некоторый выбранный признак. Основными преимуществами каскадного классификатора являются большая информационная емкость, традиционность и привычность применения, возможность создания для объектов классификации мнемонических кодов, несущих смысловую нагрузку. Схема каскадного классификатора представлена на рисунке.

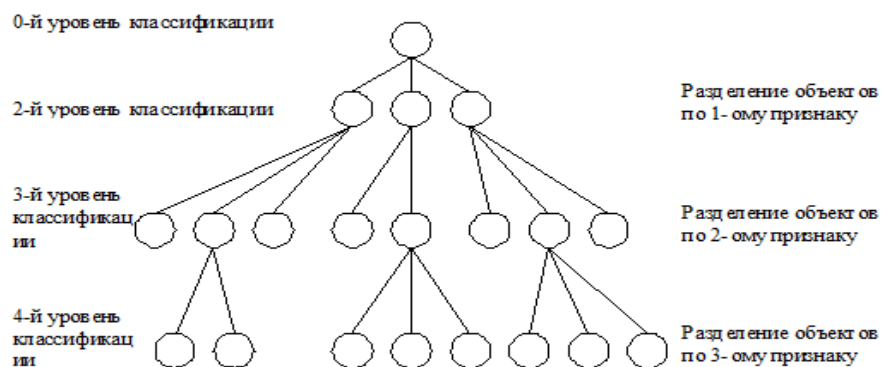


Рисунок – Схема каскадного классификатора

Изначально используется гистограммная обработка [1, с. 368] для того, чтобы убрать «шумы» на изображении. Она эффективна, когда сравнивается с другими методами сегментации изображений, потому что построение гистограмм требует только один проход по пикселям. Гистограмма вычисляется по всем пикселям изображения и её минимумы и максимумы используются, чтобы найти кластеры на изображении. Цвет или яркость могут быть использованы при сравнении. Рассмотренный метод сегментации изображений путем их пороговой обработки в чистом виде редко применяется, поскольку он эффективен только для сравнительно небольшого круга изображений, в которых объекты и фон четко различаются по яркостному признаку. В случае, если яркость фона заметно изменяется по изображению, используется вариант пороговой обработки с локальным порогом.

Для классификации растений необходимо найти лист на изображении. Для этого лучше использовать алгоритм разрастания областей [2, с. 192]. В качестве входных данных этот метод принимает изображения и набор семян. Семена отмечают объекты, которые нужно выделить. Области постепенно разрастаются, сравнивая все незанятые соседние пиксели с областью. Разность между яркостью пикселя и средней яркостью области используется как мера схожести. Пиксель с наименьшей такой напрасностью добавляется в соответствующую область. Процесс продолжается, пока все пиксели не будут добавлены в один из регионов. Значение яркостей пикселей, вокруг которых производится наращивание областей, могут быть заранее заданы, это так называемые «центры кристаллизации», или, например, в процессе сегментации значение яркости, с которым сравнивается каждый новый проверяемый пиксел, может каждый раз вычисляться как среднее значение яркости, уже выращенной к данному моменту области.

Когда лист найден, вычисляется его площадь и периметр. После чего находится их отношение по формуле.

$$D=S/P,$$

где S – площадь листа растения, P – периметр листа растения.

После каждого уровня классификатора осуществляется сравнение признаков эталона и обрабатываемого изображения. Если признаки схожи, то выполняется переход на следующий уровень, где осуществляется дальнейшее сравнение.

Эталоны, в качестве изображений, и их признаки хранятся в специально созданной базе данных. Эталонами являются заранее сфотографированные листья с точным определением сорта.

В результате апробации разработанного программного обеспечения было выявлено стопроцентная идентификация на эталонных изображениях и 70% на реальных изображениях объектов.

Список цитированных источников

1. Красильников, Н.Н. Цифровая обработка 2D- и 3D-изображений: учеб. пособие. – СПб: БХВ-Петербург, 2011. – 608 с.
2. Pratt, W.K. Digital Image Processing 4th Edition / John Wiley & Sons, Inc. – Los Altos, California, 2007.

УДК 004.8

АДАПТИВНОЕ ОБУЧЕНИЕ СИГМОИДАЛЬНЫХ НЕЙРОЭЛЕМЕНТОВ В АРХИТЕКТУРЕ МНОГОСЛОЙНОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Савицкий А.Ю., Савицкий Ю.В.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

В последнее время в мире активизировались исследования в области глубокого обучения многослойных нейронных сетей. Это связано с определенными успехами в данной области, достигнутыми рядом исследователей [1, 2], а также высокой практической значимостью сильно-многослойных нейронных сетей (СМНС). При этом перспективным считается подход к предобучению (pre-training) СМНС не только с помощью ограниченной машины Больцмана (RBM), но и с применением нейросетевых автоэнкодеров (AutoEncoder, AE). Каждый такой AE представляет собой трехслойный персептрон архитектуры $N^{\circledast} M^{\circledast} N$, где параметр N соответствует количеству входов текущего предобучаемого слоя, M – количеству нейронов указанного слоя СМНС. Последовательное (начиная с входного слоя СМНС) обучение совокупности таких AE позволяет получить наборы весовых коэффициентов для финальной настройки синаптических связей всей СМНС (fine-tuning). При этом, для обучения как AE, так и СМНС, как правило, применяется алгоритм обратного распространения ошибки (Back Propagation Error, BPE) [3]. Очевидно, что эффективность алгоритма BPE напрямую определяет эффективность (точность обучения, обобщающие свойства) результирующей модели СМНС в целом.

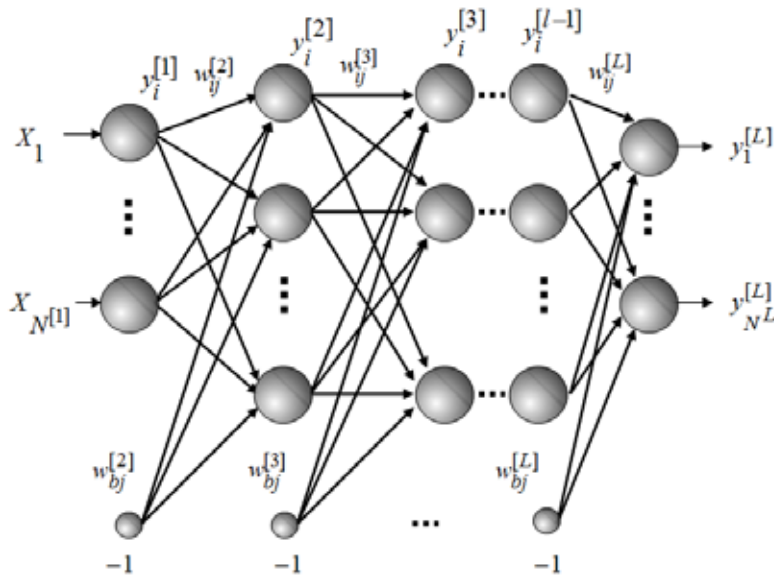


Рисунок 1 – Архитектура многослойной нейронной сети

На рисунке 1 приведена обобщенная архитектура многослойной нейронной сети, структура искусственного НЭ, а также введены обозначения параметров сети.

Нейронный элемент слоя l осуществляет функцию преобразования некоторого вектора входных сигналов $Y^{[l-1]}$ в выходную активность $y^{[l]}$ по следующему правилу:

$$S_j^{[l]} = \sum_{i=1}^{N^{[l-1]}} y_i^{[l-1]} w_{ij}^{[l]} - w_{bj}^{[l]}, \quad y_j^{[l]} = g^{[l]}(S_j^{[l]}), \quad j = 1, \dots, N^{[l]}, \quad (1)$$

где $S_j^{[l]}$ – взвешенная сумма входных активностей НЭ j ; $w_{ij}^{[l]}$, $w_{bj}^{[l]}$ – весовые коэффициенты; $g^{[l]}(S_j^{[l]})$ – активационная функция НЭ.

В рамках данной архитектуры сформулирована и доказана теорема, позволяющая осуществлять точную настройку весовых коэффициентов нейроэлементов с сигмоидной функцией активации.

Теорема. Правила модификации синаптических связей НЭ j , находящегося в слое L , с сигмоидной функцией активации $g^{[L]}$, минимизирующие среднеквадратичную ошибку $E_j^p(t) = 1/2(y_j^{[L],p}(t) - D_j^p)^2$ данного НЭ для эталона p на итерации обучения t , определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ w_{ij}^{[L]}(t+1) &= w_{ij}^{[L]}(t) - \frac{S_j^{[L],p}(t) - \ln \frac{D_j^p}{1 - D_j^p}}{1 + \sum_{k=1}^{N^{[L-1]}} (y_k^{[L-1],p}(t))^2} y_i^{[L-1],p}(t), \\ \vdots \\ \vdots \\ w_{bj}^{[L]}(t+1) &= w_{bj}^{[L]}(t) + \frac{S_j^{[L],p}(t) - \ln \frac{D_j^p}{1 - D_j^p}}{1 + \sum_{k=1}^{N^{[L-1]}} (y_k^{[L-1],p}(t))^2}, \\ \vdots \\ \vdots \end{aligned} \quad (2)$$

где D_j^p — эталонное выходное значение j -го НЭ.

Авторами также получены аналогичные правила модификации синаптических связей для НЭ с функциями активации биполярная сигмоидная и гиперболический тангенс.

Следует также отметить, что результаты теоремы (с учетом алгоритма BPE) можно обобщить на НЭ последующих слоев многослойной нейронной сети.

Ряд вычислительных экспериментов был проведен при обучении нейросетевых энкодеров архитектуры 900@ 50@ 900. С этой целью для обучения были сгенерированы битовые образы печатных символов размером 30´30 и количеством 100 экземпляров. При выполнении 100 итераций обучения среднеквадратичная ошибка обучения (в расчете на один эталон) достигла значения 0.000945, чего не удавалось достичь методом эмпирического подбора шага. Таким образом, полученные правила (2) можно применять как на этапе предобучения в нейросетевых энкодерах, так на этапе финальной настройки целостной архитектуры СМНС.

Список цитированных источников

1. Hinton G.E. A fast learning algorithm for deep belief networks / G.E. Hinton, S. Osindero, Y.-W. Teh // *Neural Computation*. – 2006. – Vol. 18. – №. 7. – P. 1527–1554.
2. Bengio, Y. Learning deep architectures for AI // *Foundations and Trends in Machine Learning*. – Vol. 2. – №. 1. – 2009. – P. 1–127.
3. Rumelhart D.E. Learning representations by back-propagating errors / D.E. Rumelhart, G.E. Hinton, R.J. Williams // *Nature*, Vol. 323. – 1986. – P. 533–536.

УДК 004.9

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ОРГАНИЗАЦИЯХ РАЗЛИЧНОГО ТИПА

Шецова Е.В.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Выбор информационной технологии в той или иной предметной области определяется следующими моментами: сферой деятельности организации; принятой моделью управления; новыми задачами, стоящими перед организацией; существующей информационной инфраструктурой; величиной организации. С учетом этих критериев делается выбор программно-аппаратного обеспечения информационной технологии.

Так на малых предприятиях информационные технологии, как правило, связаны с решением задач бухгалтерского учета, накоплением информации, созданием информационных баз данных и организации телекоммуникационной среды для связи пользователей между собой и с другими предприятиями и организациями. Персонал малых предприятий работает в среде локальных вычислительных сетей различной топологии.

Функционал для специалистов среднего уровня реализуется в виде различного рода АРМ, а банк данных используется для информационной поддержки работы верхнего управленческого звена. Таким образом, на малых предприятиях более рационально комбинировать информационную архитектуру, сочетающую в себе распределенную обработку данных с централизованным хранением информационных ресурсов в едином банке данных [1]. В качестве центральной вычислительной системы можно использовать, например, UNIX- сервер, под управлением которого функционирует сетевая СУБД, например MS SQL Server, Oracle или PostgreSQL, накопление информации в базу данных которой осуществляется посредством все тех же АРМ или иного клиентского ПО.

Комбинированная сетевая организация автоматизированной информационной технологии дает такие преимущества, как экономия ресурсов, гибкость к требованиям пользователей за счет широкого сочетания аппаратных и программных средств и т.д.

Тем не менее опора на единственный сервер не всегда является лучшим выходом, т.к. существуют ограничения на количество клиентских подключений, а так же снижение отказоустойчивости. Увеличение числа клиентов приводит к замедлению реакции сис-

темы. Кроме того, для принятия управленческого решения необходимо централизованно решать разноплановые задачи, начиная с традиционных приложений для бизнеса типа программ бухгалтерского учета и заканчивая задачами оценки коммерческого риска с использованием систем искусственного интеллекта. Смешивать весь спектр таких задач в одном компьютере малоэффективно, а попытки наращивания вычислительной мощности центрального сервера приводят к резкому увеличению финансовых трат. Поэтому подобное комбинированное построение информационной инфраструктуры оправдывает себя только при реализации на малых предприятиях.

В средних организациях большую роль для управленческого звена играют функционирование электронного документооборота и привязка его к конкретным бизнес-процессам. В таких организациях, по сравнению с малыми предприятиями расширен круг решаемых задач. Поэтому целесообразна организация автоматизированных хранилищ и архивов информации, позволяющих накапливать документы в различных форматах, структурированных, с возможностью поиска, защиты информации от несанкционированного доступа и т.д. [1].

Для повышения отказоустойчивости на средних предприятиях используется несколько серверов в различных функциональных подразделениях. Локальная вычислительная сеть средних предприятий представляет собой двухуровневую архитектуру, на верхнем уровне которой организована маршрутизация для обмена информацией между локальными серверами, а на нижнем уровне – подключение ЛВС подразделений различной топологии к локальному серверу для обеспечения пользователям взаимного обмена информацией и доступа к корпоративным ресурсам.

В крупных организациях информационная технология строится на базе современного программно-аппаратного комплекса, включающего телекоммуникационную связь, развитую сетевую архитектуру с применением высокоскоростных корпоративных вычислительных сетей. Корпоративная информационная технология крупного предприятия имеет зачастую трехуровневую структуру [1]: центральный сервер устанавливается в главном офисе (серверный уровень), локальные серверы – в подразделениях и филиалах (промежуточный уровень), станции клиентов, организованные в ЛВС подразделения – у персонала компании (клиентский уровень).

Список цитированных источников

1. Бастриков, М.В. Информационные технологии управления: учебное пособие / М.В. Бастриков, О.П. Пономарев. – Калининград: Изд-во ин-та «КВШУ», 2005.

УДК 004.357

ГОЛОСОВОЕ УПРАВЛЕНИЕ МИКРОКОНТРОЛЛЕРАМИ НА БАЗЕ ПЛАТФОРМЫ ARDUINO

Черкас А.Л.

Гомельский государственный университет имени П.О. Сухого, г.Гомель
Научный руководитель: Курочка К.С., к.т.н., доцент

Голосовое управление – это способ взаимодействия с устройством при помощи голоса. В отличие от распознавания речи, голосовое управление предназначено для ввода управляющих команд [1]. В последнее время голосовое управление получило широкую популярность в различном программном обеспечении и оборудовании.

Микроконтроллеры Arduino [2] позволяют присоединить микрофон и воспринимать звук непосредственно на контроллере. Однако чтобы микроконтроллер выполнял команды, источник звука должен находиться в непосредственной близости от микрофона, что ограничивает область применения голосового управления для данных микроконтроллеров.

Взаимодействие микроконтроллера с мобильным устройством позволяет решить данную проблему. С применением мобильного устройства радиус действия голосового управления расширяется до радиуса действия беспроводной технологии соединения.

В предлагаемой системе выделяются два модуля. Первый модуль располагается на мобильном устройстве, выполняет распознавание голосовых команд и передает распознанные команды на микроконтроллер. Второй модуль располагается на микроконтроллере и принимает команды с мобильного устройства, а затем выполняет их.

Предлагаемая система располагает следующим функционалом:

- Создание собственных команд. Пользователь с помощью программного интерфейса может создавать собственный набор команд для управления микроконтроллером. Команды записываются в базу знаний приложения и используются в дальнейшем мобильным устройством для распознавания голосовых команд.

- Распознавание голосовых команд. Приложение на мобильном устройстве распознает голосовые команды. Распознавание голосовых команд происходит с помощью MFCC [3]. Приложение сопоставляет имеющиеся в базе знаний команды с командой, сказанной пользователем.

- Передача команд на микроконтроллер. Распознанные команды передаются с мобильного приложения на микроконтроллер посредством беспроводной связи.

- Выполнение команд микроконтроллером. Микроконтроллер выполняет команду, полученную с мобильного приложения.



Данный проект создан для решения задачи голосового управления микроконтроллерами с помощью мобильных устройств. Общая схема выполнения проекта представлена на рисунке 1.

Рисунок 1 – Общая схема выполнения проекта

Для распознавания команд используются мелкочастотные кепстральные коэффициенты. К ним стоит относиться как к некоторому фильтру, на входе у которого – фонограмма, на выходе – набор векторов, который распознается как слово. Так как слова различной длины, возникает проблема размерности векторов.

Для решения данной проблемы необходимо находить места «сгущения» распределения векторов и в качестве результирующего вектора брать конкатенацию векторов, являющихся центрами «сгущений». Такой конкатенированный вектор будем называть супервектором средних, а сами центры — средними значениями. При этом в качестве «отправной точки» будем использовать супервектор средних, полученный на всех MFCC-векторах всей базы обучения. Преобразовав таким образом последовательность MFCC-векторов в один супервектор средних фиксированной размерности, можно применять различные методы классификации.

Предложенная система предоставляет независимую систему распознавания голосовых команд пользователя, не требующей подключения к сети интернет, позволяет самостоятельно добавлять пользовательские команды, а также передавать распознанные команды на контроллер. Применение беспроводного средства передачи данных увеличивает радиус применения системы. Возможность добавления пользовательских команд делает систему более универсальной и применимой для различных микроконтроллеров на базе платформы Arduino.

Список цитированных источников

1. Лебедев, К. Голосовое управление [Электронный ресурс] / К. Лебедев // Академик [сайт] – Электрон. текстов. дан. – 2010. – Режим доступа: <http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/630511> – Дата доступа: 15.10.2015.
2. Arduino [Электронный ресурс] // Wikipedia [сайт] – Электрон. текстов. дан. – 2015. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Arduino> – Дата доступа: 20.10.2015.
3. McLachlan, G. Finite Mixture Models [Текст]: учебное пособие / G. McLachlan, D. Peel – New York: John Wiley & Sons, 2000. – 456 с.

УДК 004.94

ПОДХОД К МЕТОДУ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ АНАЛИЗА МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТОПОЛОГИИ ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ

Антоник И.А.

Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Хведчук В.И., к.т.н., доцент

Введение

Для описания физических процессов в полупроводниковых структурах кремниевых интегральных схем используются уравнения непрерывности для дырок и электронов, уравнение Пуассона – для электростатического потенциала, уравнение Максвелла – для полной плотности тока, уравнение для плотностей электронного и дырочного тока. Механические свойства также описываются с помощью уравнения Пуассона.

Постановка задачи численного моделирования элементов интегральных схем

На нижнем структурно-физическом уровне объект моделирования, в общем случае являющийся трёхмерной полупроводниковой структурой, представляют множеством плоских сечений, нормальных и параллельных плоскости рабочей поверхности БИС.

Множество сечений для нормирования модельных объектов выбирают на основании качественного анализа физических процессов в интегральной структуре элементов БИС. Эти сечения должны совпадать с плоскостями, в которых развиваются основные физические процессы, характеризующие работу прибора. Число сечений зависит от требуемой детализации учитываемых факторов, процессов и эффектов. Конфигурации моделей областей определяют в пределах этих сечений. Рассмотрим поведение пластины с механической точки зрения.

Аппроксимация уравнения Пуассона

Рассмотрим непрерывные независимые переменные x, y , изменяющиеся в заданных пределах. Заменяем их двумерной сеткой из точек.

$$i := 0..n \quad j := 0..n \quad D := 2 \times \frac{a}{n} \quad x_i := -a + D \times i \quad y_j := -a + D \times j$$

Здесь D – шаг сетки; n количество узлов в измерениях x и y . Такая аппроксимация единственным образом распространяется и на диэлектрические области.

Геометрия двояковыпуклой поверхности описывается

$$z(x, y) = 2R - \sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - y^2}, \quad (1)$$

где $R = \text{const}$ параметр

и, переходя к относительным координатам:

$$x_{i,j} = \frac{x_i}{R}, \quad (2)$$

$$h_{i,j} = \frac{y_j}{R} \quad (3)$$

получаем следующие выражения для двумерной аппроксимации с использованием функции Эри

$$a_{0i,j} = \frac{1}{(1 - (h_{i,j})^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4)$$

$$b_{0i,j} = a_{0i,j}, \quad (5)$$

$$c_{0i,j} = \frac{1}{(1 - (x_{i,j})^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad d_{0i,j} = c_{0i,j}, \quad (6)$$

$$e_{0i,j} = \frac{-2}{(1 - (h_{i,j})^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-2}{(1 - (x_{i,j})^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (7)$$

$$z_{i,j} = g_2(-R D^2) \sqrt{1 + \frac{(x_{i,j})^2}{1 - (x_{i,j})^2} + \frac{(h_{i,j})^2}{1 - (h_{i,j})^2}}, \quad (8)$$

где g_2 – постоянное воздействие, $z_{i,j}$ – плотность воздействия.

В результате, используя функцию relax, математической системы Mathcad

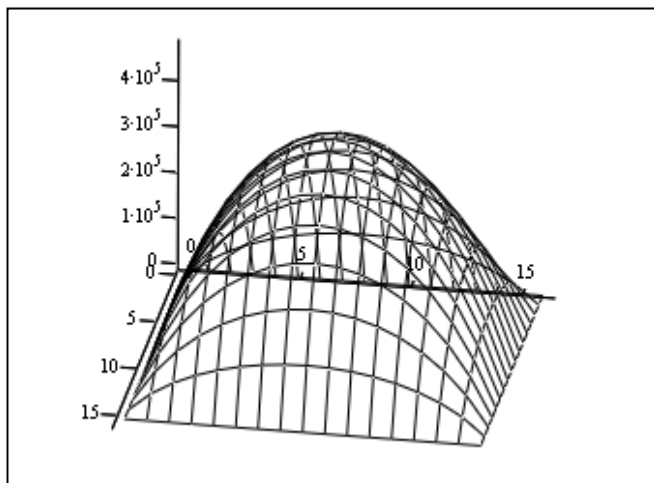
$$F := \text{relax}(a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, z, F, \text{dil}). \quad (9)$$

Граничные условия

Для учета особенностей краевых эффектов на границах двояковыпуклой пластины определим сетку за ее пределами. Тогда функция Эри в виде (для одной четверти пластины)

$$F_{i,n+1} = -F_{i,n-1} + z_{i,n} (1 - (x_{i,n})^2)^{\frac{3}{2}}, \quad (10)$$

$$i = \frac{n}{2} \leq n \quad j = \frac{n}{2} \leq n.$$



Угловые точки отличаются уникальностью определения усилий. Их величины определяются из условия равновесия вертикальных проекций активных и реактивных воздействий, причем из-за симметрии можно рассматривать равновесие четверти всей оболочки.

Переходя к квазиусилиям,

F

$$N_{x_{i,j}} := \sqrt{\frac{1 - (h_{i,j})^2}{1 - (x_{i,j})^2}} \times n_{x_{i,j}}, \quad (11)$$

$$N_{y_{i,j}} := \sqrt{\frac{1 - (x_{i,j})^2}{1 - (h_{i,j})^2}} \times n_{y_{i,j}}, \quad (12)$$

$$N_{g_{\max_{i,j}}} := \frac{E l_{i,j} + \sqrt{(E l_{i,j})^2 - 4 \times (\sin j_{i,j})^2 \times N_{x_{i,j}} \times N_{y_{i,j}} - (N_{xy_{i,j}})^2}}{2 \times \sin j_{i,j}}, \quad (13)$$

$$Ng_{\min_{i,j}} := \frac{El_{i,j} - \sqrt{(El_{i,j})^2 - 4 \times (\sin j_{i,j})^2 \times Nx_{i,j} \times Ny_{i,j} - (N_{xy_{i,j}})^2}}{2 \times \sin j_{i,j}}. \quad (14)$$

Заключение

На основании проведенных расчетов можно заметить, что при нарушении кривизны поверхности пластины возможны значительные концентрации усилий в угловых точках пластины. Нарушение кривизны может сказаться и на ее электрических свойствах. Использование метода конечных разностей налагает определенные ограничения на реальную применимость данной модели, но увеличение концентраций усилий обычно подтверждается и другими методами, например методом конечных элементов. Реализованные операции метода конечных разностей могут быть использованы для разработки инструментария для построения базовых моделей расчета уравнений, описывающих процессы в кремниевых структурах.

Важным приложением разработанных средств является использование для задач обучения. В целом, предложенные средства позволяют сократить время при подготовке тестирующего контента для системы обучения и контроля знаний.

Список цитированных источников

1. Абрамов, И.И. Численное моделирование элементов интегральных схем / И.И. Абрамов, В.В. Харитонов – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – 224 с.
2. Mathcad 6.0. Руководство пользователя. – М.: Мир, 1996.

УДК 004.04

ОДИН ИЗ ПОДХОДОВ К ОЦЕНКЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОТОКОВЫХ СИСТЕМ

Деревянко Д.В., Абрамов Е.С., Гетиков Д.В., Ковалёв Д.П.

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель

Научный руководитель: Сукач Е.И., к.т.н., доцент

Рассматривается один из подходов к оценке вероятностных характеристик надёжности многоэлементных сложных систем, каждый компонент которой может иметь несколько состояний.

Актуальность

Для управления дорожным движением на транспортной сети городов повсеместно используются системы управления, алгоритмы которых основаны на моделях транспортных потоков. Моделирование транспортных систем необходимо для минимизация задержек по направлениям при условии, что интенсивность движения постоянно изменяется во времени и в пространстве.

Актуальной задачей является задача маршрутизации (нахождение кратчайшего маршрута следования) и о максимальном потоке (нахождение максимальной пропускной способности).

Если считать веса ребёр графа транспортной сети известными и не меняющимися со временем, то эта задача довольно эффективно решается. Но на практике далеко не всегда все нужные веса ребёр бывают известными. В зависимости от времени суток ситуация на дорогах может кардинально меняться, поэтому возникает необходимость вероятностного моделирования. Примером таких изменений служит образование заторов в часы пик – за короткий промежуток времени движение может быть практически парализовано даже на многополосных магистралях.

Цель исследования

Целью исследования была разработка программного комплекса, рассчитанного на построение кратчайшего пути/максимального потока в условиях всех возможных комбинаций сложной системы. Он также позволяет установить зависимости времени выполнения алгоритма от количества вершин/состояний/связей.

Объектом исследования является сложная система, включающая множество компонентов, каждый из которых характеризуется множеством несовместных состояний. Состояния соответствуют промежуточным уровням исследуемого свойства компонентов, которые характеризуются некоторым физическим параметром. Ставится задача определения вектора вероятностей состояний исследуемой системы по вероятностным значениям исследуемого свойства её компонентов.

Суть подхода

Подход заключается в генерации всех возможных матриц смежности $n \times m$, где n – количество состояний, m – число связей между рёбрами, для каждой комбинации программа находит максимальный поток/кратчайший путь, строит вектор вероятностей и графически выделяет оптимальный путь/поток.

Пример: матрица смежности графа с двумя возможными состояниями. В графе имеются

	A	B	C	D
1	Min path	Path	Probability	Count
2	10	1-2-5-7	0.3445433856	114
3	9	1-2-5-7	0.3362400000	128
4	7	1-3-5-7	0.0720000000	128
5	11	1-2-5-7	0.0464652288	21
6	8	1-2-5-7	0.0415840000	160
7	7	1-2-5-7	0.0386400000	96
8	9	1-3-6-7	0.0350208000	40
9	10	1-3-5-7	0.0331223040	22
10	11	1-3-6-7	0.0100611072	13
11	10	1-4-6-7	0.0096215040	18
12	8	1-3-6-7	0.0091968000	56
13	5	1-3-5-7	0.0080000000	128
14	10	1-3-6-7	0.0075168000	24
15	8	1-3-5-7	0.0037632000	24
16	9	1-4-3-5-7	0.0033408000	24
17	7	1-4-3-5-7	0.0003712000	24
18	10	1-4-3-6-7	0.0002806272	3
19	11	1-4-3-6-7	0.0002322432	1

ребра, соединяющие вершины. Для создания всех возможных комбинаций используется число в системе счисления равной числу возможных состояний. В примере у ребёр может быть два состояния 0101110011, значение 0 – ребро в первом состоянии, 1 – во втором.

После обработки полученной матрицы смежности добавляется к двоичному число единица и генерируется новая матрица смежности. Таким образом перебираются всевозможные комбинации матриц. Матрицы обрабатываются методами Форда-Фолкерсона и Дейкстры, соответственно для поиска кратчайшего пути и максимального потока.

В итоге получаем $2^{10} = 1024$ возможных матриц. Те же операции проводятся для генерации матриц вероятностей.

Рисунок 1 – Результат для кратчайшего пути

где Min path – стоимость кратчайшего пути;

Path – номера вершин кратчайшего пути;

Probability – вероятность кратчайшего пути;

Count – количество совпадений результата.

Сумма всех вероятностей равна 1. Результаты отсортированы по убыванию вероятностей их наступления. Также графически прорисовывается оптимальный путь/максимальный поток.

Заключение

Практическое применение программного комплекса позволит спрогнозировать и оценить надёжность многокомпонентных сложных систем с учётом со временем изменяющихся компонентов.

Список цитированных источников

1. Сукач, Е.И. Моделирование вероятностных характеристик сложных систем с использованием стохастических алгебр / Е.И. Сукач [и др.] // V Международная конференция-форум «Информационные системы и технологии». Академия управления при Президенте Республики Беларусь, 16-17 ноября 2009 г. – Минск: А.Н. Ваксин – 2009. – Ч. 1. – С. 178–181.

2. Жердецкий, Ю.В. Способ формализации объектов графовой структуры с вероятностными параметрами функционирования / Е.И. Сукач, Д.В. Ратобильская, Ю.В. Жердецкий, Г.А. Мальцева // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2012. – №5(74). – С. 195–202.
3. Гасников, А.В. Введение в математическое моделирование транспортных потоков / А.В. Гасников. – М.: МЦНМО, 2014. – 330 с.
4. Рябинин, И.А. Надёжность и безопасность структурно-сложных систем / И.А. Рябинин – СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2007. – 276 с.

УДК 681.3

К ОЦЕНКЕ ХАРАКТЕРИСТИК СТОХАСТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Занько О.С., Рачковская П.Д.

Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Муравьев Г.Л., к.т.н., доцент

Точность расчета характеристик систем на моделях определяется наряду с другими факторами и адекватностью представления в моделях параметров систем. Целью работы является: оценка характеристик имитационного моделирования на базе стохастических сетевых моделей, сетей массового обслуживания; анализ чувствительности характеристик, рассчитываемых на модели, к изменению значений параметров: анализ влияния факторов неадекватности отображения параметров в моделях [1, 2].

При исследовании использованы: методы и модели теории массового обслуживания, методы имитационного моделирования дискретных систем; экспериментальные методы и средства мониторинга базовых процессов имитационных моделей; UML-диаграммы для описания базовых процессов имитационных моделей. Для имитационного моделирования применялась система GPSS World, средства языка PLUS [3].

Адекватность задания параметров зависит от точности, полноты и детальности их воспроизведения в модели. Определяется полнотой и точностью измерений, получения соответствующих данных о вычислительной нагрузке (моделируемых задачах, процессах). Ограничивается возможностями метода расчета модели. В общем случае параметры модели описываются распределениями (гистограммами). В инженерных приложениях полнота задания часто ограничивается числовыми характеристиками, например, средними значениями и дисперсиями, доверительными интервалами, коэффициентами вариации и т.д. Указанные параметры могут быть заданы с различной степенью детальности. Например, при описании параметров процессов могут использоваться "трассы" значений либо статистические оценки параметров применительно к конкретному процессу, типам процессов либо с усреднением безотносительно к типам процессов.

Анализ проводился на различных архитектурах сетей для разных вариантов организации их функционирования, приведенных на рисунке ниже. Использовались сети многофазные, с центральным обслуживающим узлом (циклическая обработка), сети с произвольным набором прямых и обратных связей. Рассматривались сети с одним и многими потоками запросов на обслуживание, сети разомкнутые, замкнутые, смешанные. Варьировалось число узлов сети, степень их сбалансированности. Так чувствительность узловых и системных характеристик к изменению параметров рассматривалась: - для сетей с числом обслуживающих узлов 2, 5, 10, 20; – при коэффициентах загрузки узлов в 0,3, 0,5, 0,7, 0,9; – при значениях коэффициента вариации параметров сетей (входных потоков, законов обслуживания в канале одного либо всех узлов) в 0, 0,33, 0,5, 1, 2 (что соответствует распределению Эрланга, экспоненциальному и гиперэкспоненциальному распределению); – в зависимости от изменения средних значений трудоемкостей обслуживания запросов в каналах узлов сети в пределах $\pm 50\%$ ($\pm 10\%$, $\pm 20\%$, $\pm 30\%$) и т.д. Для экспоненциальных разомкнутых однородных сетей получены аналитические оценки чувствительности характеристик. В работе приведены подробные планы экспериментов по отдельным факторам, полученные результаты.



Требования к моделям определяются областью их применения. В практике работы с техническими системами выделяют такие области использования моделей, как: – проектирование новых систем; – проектирование систем на базе стандартных узлов; – эксплуатация систем (настройка и развитие конфигурации). Существуют экспертные оценки требований к погрешностям моделирования в 40–50%, 20–30%, 10–30%, 20–30% соответственно. Тогда оценки чувствительности позволяют формулировать требования к точности задания параметров моделей в зависимости от требований к их адекватности, области применения.

Список цитированных источников

1. Майоров, С.А. Основы теории вычислительных систем / С.А. Майоров, Г.И. Новиков, Т.И. Алиев. – М.: Высшая школа, 1978. – 320 с.
2. Климович, А.Н. Оценка чувствительности характеристик ПСМО / А.Н. Климович, Н.В. Фомина // Новые математические и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы 16 РНК студентов и аспирантов. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2013. – Ч. 1. – С. 76.
3. Рыжиков, Ю.И. Имитационное моделирование. Теория и технологии / Ю.И. Рыжиков. – СПб.: Корона, 2004. – 320 с.

УДК 621.313.2:629.7

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРСПЕКТИВНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ АВИАЦИОННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ В СРЕДЕ MATLAB

Карнаухов Н.С.

*Белорусская государственная академия авиации, г. Минск
Научный руководитель: Капустин А.Г., к.т.н., доцент*

Дальнейшее совершенствование авиационных систем регулирования напряжения (СРН), а следовательно, и качества электроэнергии, связано с применением в них оптимальных законов управления и цифровой техники [1, 2, 3]. Система регулирования напряжения включает в свой состав бесконтактный синхронный генератор (СГ) переменного тока и регулятор напряжения (аналоговый или цифровой).

Переходные процессы в авиационном бесконтактном трехфазном СГ переменного тока с возбудителем описаны с помощью уравнений Парка-Горева в ортогональных осях d, q [1, 2, 3]. Для исследования свойств СГ, а в конечном итоге и СРН, разработана виртуальная модель СГ в среде MatLab (рисунок 1).

Блоки $abc2qd$ и $qd2abc$ служат для преобразования переменных состояния СГ из фазных координат в ортогональные (оси d, q) и обратно. С помощью блоков $psid$, $psird$, $psiq$, $psirq$, $psif$ моделируется изменения потокосцеплений СГ и его системы возбуждения. Активные и реактивные составляющие нагрузки в модели представлены блоком PQ, характер нагрузки ($\cos\phi$) учитывается блоком Delta angle. Данная модель (рисунок 1) позволяет исследовать статические и переходные режимы работы СГ при изменении нагрузки [1, 2, 3].

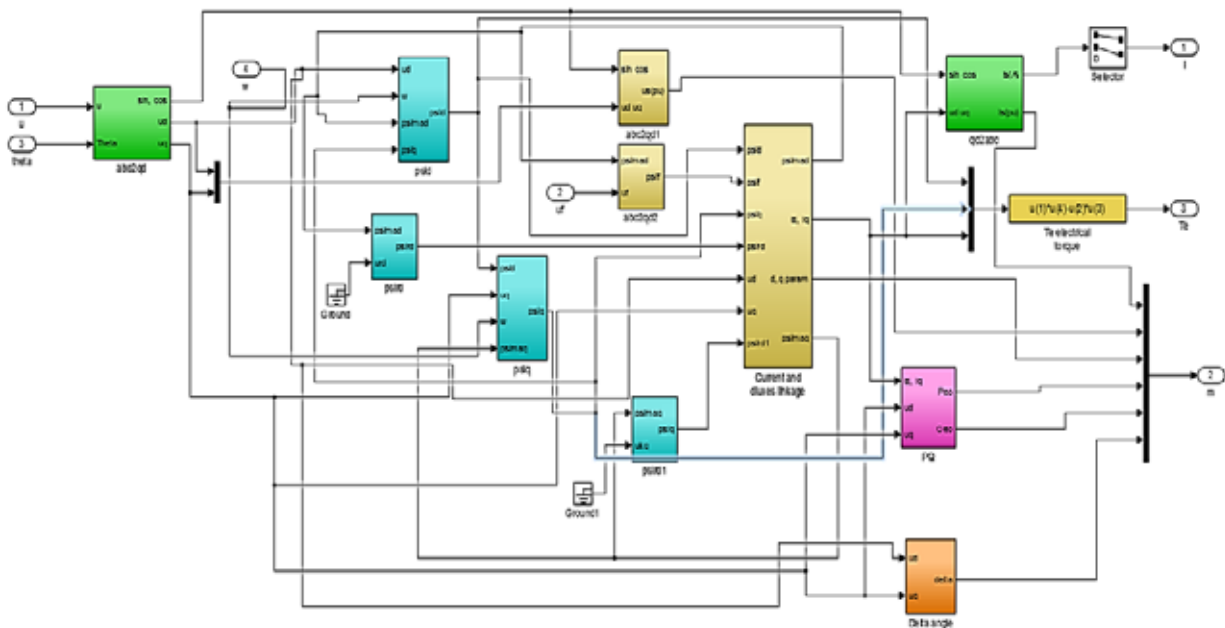


Рисунок 1 – Виртуальная модель бесконтактного синхронного генератора переменного тока в среде MatLab

В качестве объекта исследования принят авиационный бесконтактный СГ типа ГТ30НЖЧ12. Проведенные исследования по влиянию трансформаторных ЭДС и демпферных контуров на динамические характеристики математической модели СГ позволили выявить следующее: при исследовании переходных и установившихся режимов генератора допустимо пренебрегать влиянием демпферных контуров; расчеты переходных процессов генератора целесообразно проводить с учетом влияния трансформаторных ЭДС, ибо в противном случае при изменении режимов работы СГ перерегулирования напряжения будут увеличены на 5–18%, а время переходного процесса – на 15–35% по сравнению с экспериментальными данными [1, 2, 3].

Для определения оптимальных по быстрдействию управлений напряжением СГ и соответствующих им фазовых траекторий для различных по величине возмущений в диапазоне $(0,25-2,00)P_n$ использовался принцип максимума Л.С. Понтрягина (P_n – номинальная фазовая мощность синхронного генератора).

Эффективность работы цифровой СРН с синтезированными оптимальными управлениями определялась с помощью разработанной виртуальной модели оптимального цифрового регулятора (рисунок 2).

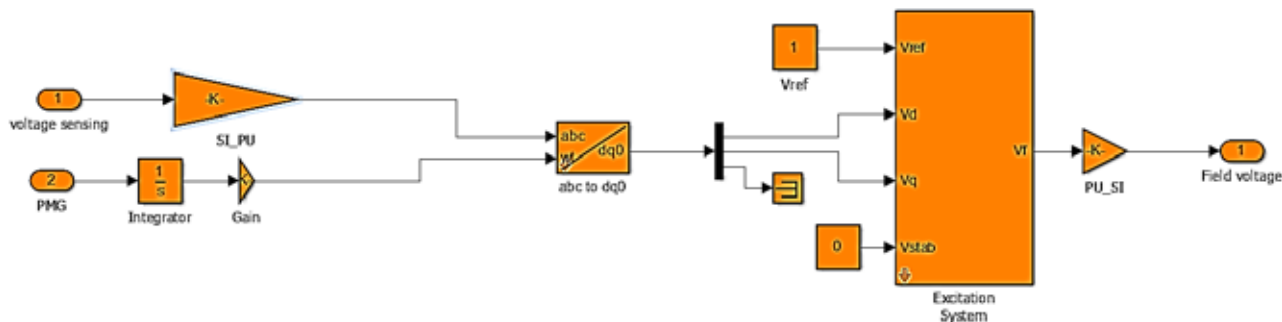


Рисунок 2 – Модель оптимального цифрового регулятора напряжения в среде MatLab

Блок voltage sensing данной модели подает выходное напряжение генератора в блок SI_PU, где данное напряжение переводится в относительные единицы измерения PU. Блок PMG имитирует частоту вращения вала генератора. Эти сигналы после преобразования в блоках Integrator, abc to dq0, Gain подаются на входы Vd и Vq блока Excitation System. Кроме этого в данный блок подается еще 2 параметра с блоков Vref (установка регулятора напряжения) и Vstab (отклонение напряжения от заданного значения). В результате на выходе блока Excitation System формируется сигнал управления, который подается на обмотку возбуждения генератора [1, 2, 3].

Исследованиями установлено, что реализация оптимального по быстродействию закона цифрового регулятора напряжения в реальном масштабе времени позволяет (в зависимости от величины нагрузки) в 1,1–1,5 раза уменьшить максимальные отклонения напряжения; в 1,2–2 раза сократить время регулирования и в 3–5 раз повысить точность регулирования напряжения по сравнению с аналогичными характеристиками СРН с генератором ГТ30НЖ412 и серийным современным регулятором напряжения БРН120Т5А [1, 2, 3]. Такое улучшение качества электроэнергии достигается за счет реализации нелинейных коэффициентов синтезированного закона регулирования напряжения и учета, кроме интегральной квадратичной оценки отклонения напряжения СГ (используется в серийных регуляторах напряжения), аналогичной оценки отклонения тока возбуждения возбудителя генератора от установившегося значения [1, 2].

При обосновании требований к цифровой системе регулирования напряжения необходимо учитывать ряд специфических факторов, обусловленных функционированием системы [1, 2, 3]. Так, величина такта обмена информацией для процессов регулирования напряжения должна быть не более $(1-1,5) \cdot 10^{-3}$, в то время как такт обмена информацией при решении задач защиты и управления может быть порядка $(80-100) \cdot 10^{-3}$ с [1, 2, 3]. Отсюда следует приоритетность выполнения задачи регулирования напряжения по отношению к задачам защиты и управления, что необходимо учитывать при построении оптимальной цифровой системы управления всей системы электроснабжения воздушных судов [1, 2, 3].

Исследование переходных процессов в канале генерирования электроэнергии с СГ и оптимальной цифровой системой управления напряжением, реализующей оптимальный по быстродействию закон управления напряжением, позволили определить пределы допустимых значений ступенчатых характеристик переходного напряжения [1, 2]. Так, длительность переходных процессов при реализации оптимального по быстродействию закона регулирования напряжения цифровой системой управления позволит добиться сокращения времени регулирования до $(15-20) \cdot 10^{-3}$ с при одновременном уменьшении диапазона изменения напряжения с $(88-155)$ В (при П-законе регулирования) до $(107-122)$ В (оптимальный закон регулирования с цифровым регулятором напряжения). Приведенные данные удовлетворяют современным требованиям, предъявляемым к системам электроснабжения переменного тока, и превосходят показатели качества электрической энергии в существующих системах, определенных в ГОСТ Р 54073–2010.

Результаты проведенных исследований разработанной оптимальной цифровой системы регулирования напряжения в канале генерирования электроэнергии с СГ свидетельствуют об эффективности данной системы и широких возможностях повышения с ее помощью качества электроэнергии на перспективных воздушных судах, что несомненно положительно скажется на повышении надежности функционирования приемников и повышении безопасности полетов воздушных судов.

Список цитированных источников

1. Карнаухов, Н.С. Субоптимальная автоматическая система регулирования напряжения авиационного синхронного генератора для перспективных воздушных судов / Н.С. Карнаухов // Молодежь и будущее авиации космонавтики: конкурс научно-технических работ и проектов 17–21 ноября 2014 г.: сборник аннотаций работ. – М.: МАИ (НИУ), 2014. – 326 с.
2. Карнаухов, Н.С. Анализ качества электроэнергии авиационной системы генерирования переменного тока с синхронным генератором и оптимальным цифровым регулятором напряжения / Н.С. Карнаухов, А.Г. Капустин // Вестник Гомельского государственного технического университета имени П.О. Сухого. - 2015. - 2(61). - С. 51- 55.
3. Капустин, А.Г. Использование среды MatLab для создания, исследования и настройки виртуальных моделей авиационного электропривода / А.Г. Капустин, Н.С. Карнаухов // Компьютерные измерительные технологии: материалы I Международного симпозиума. – М.: ДМК Пресс, 2015. - С. 244- 246.

УДК 519.237: 681.3

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЦИКЛИЧЕСКИХ ИЗМЕНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ОПЕРЕЖАЮЩИХ ИНДИКАТОРОВ

Кондратович Е.В., Гилевская Л.С.

*Белорусский государственный университет, г. Минск
Научный руководитель: Малюгин В.И., к.физ.-мат.н., доцент*

1. Проблема разработки опережающих экономических индикаторов

Проблемой разработки опережающих экономических индикаторов начали заниматься в первой половине XX века в контексте задачи анализа и обоснования экономических циклов [1]. В рамках традиционного подхода к решению данной задачи экономисты исследуют совместную динамику некоторого *сводного индекса опережающих индикаторов* и *базового экономического индикатора*. Наиболее общим показателем экономической активности, который целесообразно применять в качестве базового индикатора, является *реальный валовой внутренний продукт* (ВВП). На практике, однако, использование ВВП в качестве базового индикатора может быть сопряжено с методологическими особенностями формирования статистической информации о данном показателе.

В качестве опережающих экономических индикаторов во многих странах применяются *индексы экономических настроений* – ИЭН (*Economic Sentiment Indexes – ESI*), которые вычисляются по данным конъюнктурных опросов различных категорий участников экономических отношений и оказываются полезными для мониторинга текущей экономической ситуации и прогнозирования возможных изменений в краткосрочном периоде. Методологической основой для расчета *индексов экономических настроений*, а также некоторых других опережающих индикаторов, служит методология, разработанная Статистическим департаментом Организации экономического сотрудничества и развития (ОЭСР). В соответствии с гармонизированной системой [2], вопросы в анкетах, связанные с оценкой текущего положения в организациях-респондентах, основываются на сопоставлении фактических результатов с «нормальным» уровнем (приемлемым для экономических условий, сложившихся в период проведения обследования). Получаемая на основе конъюнктурных опросов информация носит качественный характер. Результаты обработки ответов представляются в виде простых и сводных индикаторов деловой активности. В качестве простых индикаторов используются балансы ответов (в процентах),

определяемые разностью долей респондентов, отметивших «увеличение» и «уменьшение» анализируемого показателя по сравнению с предыдущим периодом, а также разностью долей респондентов, оценивших уровень показателя как «выше нормального» и «ниже нормального» в исследуемом периоде.

Целью данной работы является построения ИЭН для белорусской экономики в соответствии с гармонизированной системой ОСЭР по данным конъюнктурных опросов нефинансовых организаций. Практическая реализация гармонизированной системы требует решение ряда проблем, обусловленных методологическими и статистическими особенностями формирования и анализа информации конъюнктурных исследований, включая: выбор подмножества вопросов для построения индикаторов; вычисление базового экономического индикатора (реального ВВП) на месячной основе; определение системы весовых коэффициентов, корректирующих выборочные оценки делового климата; статистическая обработка получаемых временных рядов (выделение сезонных, трендовых и циклических составляющих) с учетом особенностей экономических условий в рассматриваемый период времени.

2. Построение и анализ опережающего индикатора

Для построения опережающего индикатора ИЭН использовались статистические данные в виде ответов руководителей предприятий четырех укрупненных видов экономической деятельности (промышленность, строительство, транспорт, торговля) за период с января 2009 по ноябрь 2014 года (длина временных рядов $T=47$). Ответы на вопросы отражают изменения экономической деятельности, имевшие место по сравнению с тремя предыдущими месяцами, а также ожидания предприятий в течение следующих трех месяцев. В качестве базового экономического индикатора в данном исследовании используется темп прироста реального ВВП в постоянных ценах 2009 года. Общее число вопросов анкеты в рамках исследования равно 46. Из них экспертным путем отобрано $q=14$ вопросов, касающихся рассматриваемых видов экономической деятельности.

Алгоритм построения индекса экономических настроений состоит из следующих основных этапов: подсчет балансов ответов (балансов); сезонная корректировка временных рядов балансов; выделение долгосрочного тренда и циклических компонент в сезонно скорректированных временных рядах балансов; вычисление индекса экономических настроений. Приведём краткое описание этапов алгоритма.

На первом этапе на основе полученных ответов рассчитываются балансы ответов $\{X_{i,t}\} (i = \overline{1, q}, t = \overline{1, T})$ ($q=14, T=47$) по формуле:

$$X_{i,t} = P_{i,t} - N_{i,t}, \quad (1)$$

где $P_{i,t}$ – процент положительных ответов на i -й вопрос в момент времени t , $N_{i,t}$ – процент отрицательных ответов на i -й вопрос в момент времени t .

Для сезонной корректировки исходных временных рядов, а также базового показателя используется метод *TRAMO/SEATS* [3]. Выделение долгосрочного тренда и циклических компонент осуществляется с помощью двукратного применения фильтра Ходрика – Прескотта [3]. Для вычисления опережающего индекса ИЭН на первом этапе осуществляется нормировка балансов ответов $\{X_{i,t}\} (i = \overline{1, q}, t = \overline{1, T})$ по формулам:

$$Y_{i,t} = \frac{X_{i,t} - \bar{X}_i}{S}, \quad \text{где } \bar{X}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_{i,t}, \quad S = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (X_{i,t} - \bar{X}_i)^2}. \quad (2)$$

Далее вычисляется средневзвешенная сумма нормированных балансов ответов:

$$Z_t = \sum_{i=1}^{14} w_i Y_{i,t}, \quad \sum_{i=1}^{14} w_i = 1, \quad (3)$$

где $\{w_i\}$ – весовые коэффициенты, в качестве которых выступают доли добавленной стоимости в ВВП для рассматриваемых видов экономической деятельности. На последнем шаге рассчитывается сам индекс экономических настроений ESI посредством преобразования масштабирования значений $\{Z_t\}$:

$$ESI_t = \frac{Z_t - \bar{Z}}{S_z} \times 10 + 100, \quad \text{где } \bar{Z} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Z_t, \quad S = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (Z_t - \bar{Z})^2}. \quad (4)$$

В качестве иллюстрации опережающего характера построенного индекса экономических настроений в табл. 1 приводятся результаты тестирования причинной зависимости по Грейнджеру [3] между совместно моделируемыми на основе модели VAR(2) переменными: темпом роста ВВП и построенным ИЭН. На основании табл. 1 можно сделать вывод о том, что нулевая гипотеза: «ИЭН не является причиной изменения темпов прироста ВВП» отклоняется (правая панель таблицы), а гипотеза «изменение темпов прироста ВВП не является причиной для изменения ИЭН» не отклоняется (левая панель таблицы).

Таблица 1 – Результаты теста причинности по Грейнджеру

Лаг тестируемой модели	ВВП не является причиной для ИЭН		ИЭН не является причиной для ВВП	
	F-Statistic	Prob.	F-Statistic	Prob.
2	0.06295	0.9391	3.24571	0.0470

Приведенные результаты статистического анализа дают основания говорить о построенном индексе ИЭН как об опережающем индикаторе.

Список цитированных источников

1. Демидов, О. Различные индексы прогнозирования экономической активности в России / О. Демидов // Квантиль. – 2008. – № 5. – С. 83–102.
2. Малюгин, В.И. Об использовании векторных авторегрессионных моделей с переключающимися состояниями для анализа и прогнозирования циклов экономической активности / В.И. Малюгин // Экономика. Моделирование. Прогнозирование / Редкол.: М.К. Кравцов (гл. ред.) [и др.]. – Минск: НИЭИ Министерства экономики Республики Беларусь, 2015. – Вып. 9. – С. 183–196.
3. OECD Composite Leading Indicators – a Tool for Short-term Analysis. – Электронный ресурс: <http://www.oecd.org/std/li1.htm>

УДК 004.4

ГЕНЕРАТОРЫ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ ДЛЯ КРИПТОГРАФИЧЕСКОЙ ЗАЩИТЫ КАНАЛА СВЯЗИ

Меньших Т.Ю.

*Брестский государственный технический университет, г. Брест
 Научный руководитель: Дереченник С.С., к.т.н., доцент*

В настоящее время вопрос защиты информации, которая передается по каналам связи, является неделимой частью общей проблемы сферы информационной безопасности. Это связано с тем, что в различных отраслях (например, обороны и связи, финансов, транспорта, управления и производства, науке, образовании и многих других) интенсивность информационного обмена велика, что без защиты дает злоумышленникам и несанкционированным пользователям возможность использовать информацию в своих целях. Актуальность темы исследования определяется необходимостью развития защищенности каналов связи, так как большинство криптографических систем взламываются и становятся общеизвестными. Именно генераторы псевдослучайных чисел

(ГПСЧ) определяют степень защищенности канала связи в схеме синхронного поточного шифрования. Новизна работы состоит в программной разработке генераторов псевдослучайных последовательностей ПСЧ-1, ПСЧ-2 и разработке программы шифрования в среде Matlab с помощью данных ГПСЧ, что позволит в дальнейшем использовать полученные программы в практических целях.

Достоинством поточных шифров является высокая скорость шифрования, которая и определяет область их использования – шифрование данных, требующих оперативной доставки потребителю, например аудио- и видеoinформации [1]. К преимуществам поточных шифров также относятся отсутствие размножения ошибок, простая реализация системы криптографической защиты.

Недостатком является необходимость передачи информации синхронизации перед заголовком сообщения, которая должна быть принята до расшифрования любого сообщения. Это связано с тем, что если два различных сообщения шифруются на одном и том же ключе, то для расшифрования этих сообщений должна использоваться одна и та же псевдослучайная последовательность. Такое положение может создать опасную угрозу криптостойкости системы и поэтому часто используется дополнительный, случайно выбираемый ключ сообщения, который передается в начале сообщения и используется для модификации ключа шифрования. В результате разные сообщения будут шифроваться с использованием различных последовательностей.

На рисунке 1 изображена схема алгоритма работы ГСЧ-1. Рядом приведена таблица 1, полученная с помощью программы Matlab, первых десяти значений для случая $N = 16$ и начального числа 33.

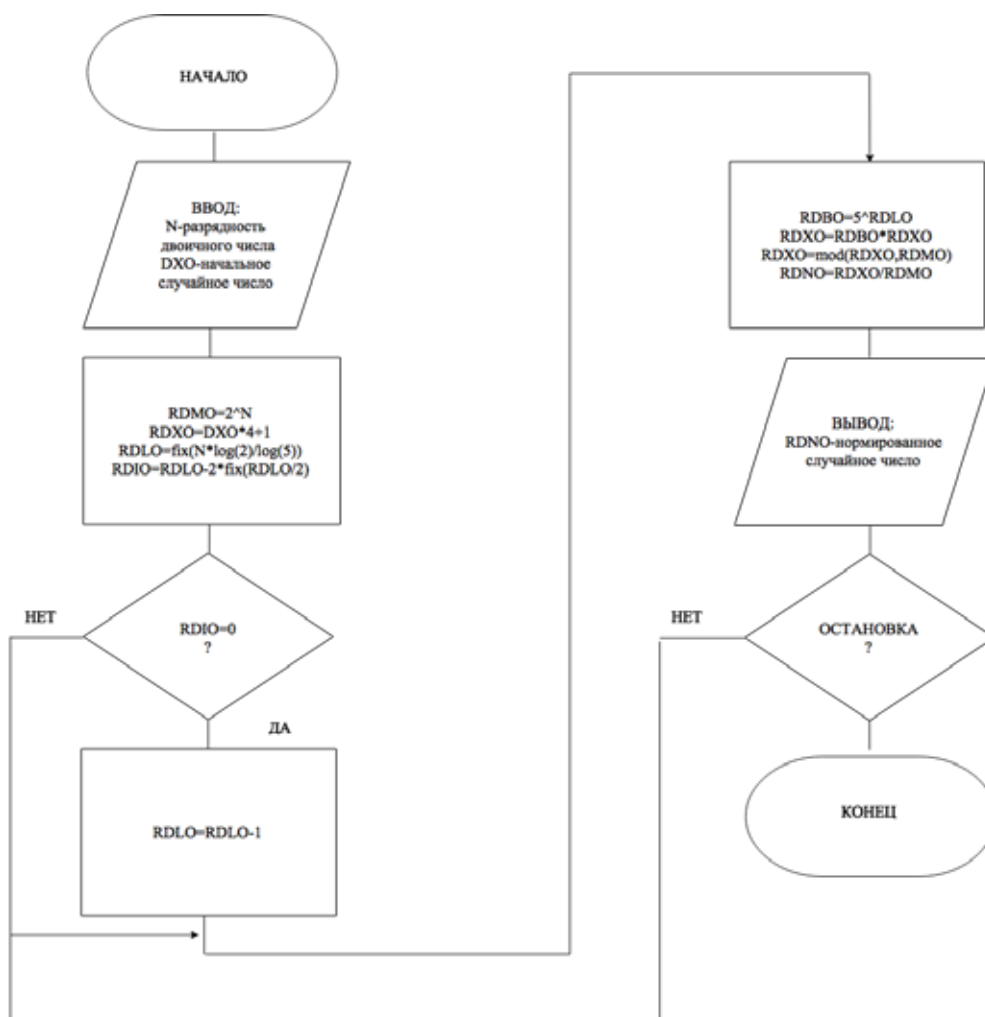


Рисунок 1 – Схема алгоритма ПСЧ-1

В вышеприведенном алгоритме операция $X(n) = \text{mod}(X(n - 1), M)$ не дает возможности получить при имеющейся разрядности ЭВМ максимально возможное количество случайных чисел. На многих ПЭВМ вводимая разрядность двоичного числа не может быть более чем 16. Поэтому в тех случаях, когда необходимо увеличить период генерации случайных чисел, жертвуя временем, можно воспользоваться другим алгоритмом, приведенным на рисунке 2, в котором операция деления заменена на операцию последовательного вычитания. Данный алгоритм уникален в своем роде и подробно описан в источнике [2]. Благодаря этому алгоритму возможно увеличить разрядность двоичного числа до 53, что позволяет получать на обычных современных ПЭВМ 2251799813685248 случайных чисел. Значения первых десяти полученных чисел приведены в таблице 2. В таком случае весь период программа реализует примерно за 5 дней (процессор компьютера Intel Core i5-3317U, базовая тактовая частота 1.7 ГГц).

Таблица 1 – Значения первых десяти случайных чисел ПСЧ-1

Номер числа	Значение числа
1	0.341934204101563
2	0.544387817382813
3	0.211929321289063
4	0.279129028320313
5	0.278213500976563
6	0.417190551757813
7	0.720474243164063
8	0.482009887695313
9	0.280899047851563
10	0.809524536132813

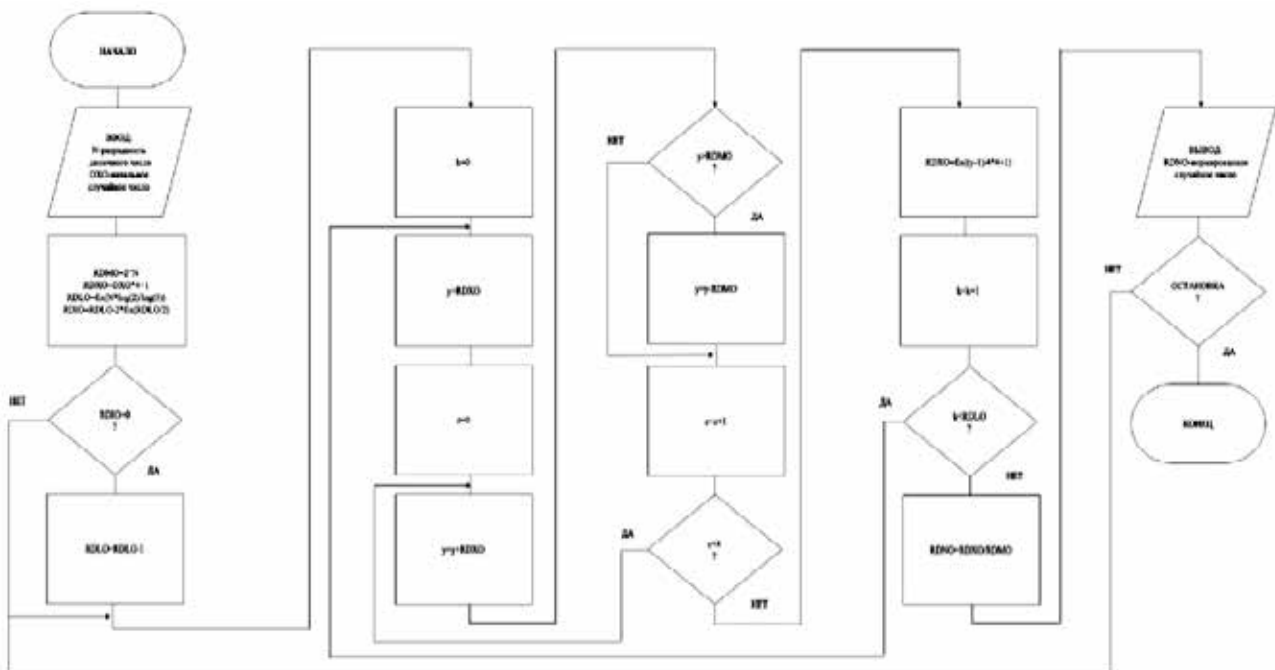


Рисунок 2 – Схема алгоритма ПСЧ-2

Таблица 2 – Значения первых десяти случайных чисел ПСЧ-2

Номер числа	Значение числа
1	0.040961374051372
2	0.235294224665242
3	0.683044209239244
4	0.030477757100518
5	0.027146390407054
6	0.425155767481531
7	0.849325928266710
8	0.216123950798070
9	0.563811995159878
10	0.500688790530220

Проведя статистическое тестирование ПСЧ-1 и ПСЧ-2, получили результаты, удовлетворяющие теоретическим данным. Результаты тестов позволили оценить равномерность распределения символов. Генераторы ПСЧ-1 и ПСЧ-2 прошли тесты на равномерность. Статистический тест показал численную характеристику последовательности и для точности 15 знаков после запятой, для выборки 500 значений чисел полученные характеристики удовлетворяют требованиям и сравнимы с теоретическими значениями для равномерного закона распределения. Для наглядного примера реализации поточно-го шифрования показано сообщение, которое преобразуется в битовую последовательность и суммируется по модулю два с псевдослучайными битами. Зашифрованное слово «привет» в битовой последовательности имеет вид:

000000111111111101111110001111101100111 101010011111011110111.

В символьном виде зашифрованному слову “привет” соответствует “пхоўіv”. Расшифрование происходит аналогичным образом.

В дальнейшем планируется разработка алгоритмов и программ для большего периода генерации псевдослучайных чисел посредством комбинации ПСЧ-1 и ПСЧ-2.

Список цитированных источников

1. Иванов, М.А. Криптографические методы защиты информации в компьютерных системах и сетях. – М.: Кудиц - Образ, 2001. – 363 с.
2. Хазан, В.Л. Математические модели дискретных каналов связи декаметрового диапазона волн: учебное пособие. – Омск, 1998. – 107 с.

ЭЛЕКТРОННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУЧНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ РАЗРАБОТКАХ

УДК 693.22.004.18

АВТОМАТИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ БЮДЖЕТИРОВАНИЯ НА ПРИМЕРЕ МОДУЛЯ «УПРАВЛЕНИЕ БЮДЖЕТАМИ» СИСТЕМЫ «ГАЛАКТИКА ERP»

Аверина И.Н., Голец О.В.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Для построения на предприятии системы бюджетного управления необходимо заложить методологию управления финансами. Сначала прорабатываются и регламентируются структура центров финансового учета организации, структура бюджетов и другие важные методологические области. Далее наступает очередь автоматизации, которая заключается в выборе и внедрении программного решения, которое станет надежным инструментом поддержки построенной системы управления финансами компании [1].

«Галактика ERP» – автоматизированная система управления, позволяющая в едином информационном пространстве оперативно решать главные управленческие задачи, а также обеспечивать персонал предприятия различного уровня управления необходимой и достоверной информацией для принятия управленческих решений.

Система «Галактика ERP» обладает модульной структурой. Каждый модуль предназначен для автоматизации отдельных, узких задач. Модули объединены в контуры, которые позволяют автоматизировать весь спектр задач одной предметной области. Такая структура позволяет заказчику выбрать именно то, что ему нужно.

Модуль «Управление бюджетом» системы «Галактика ERP» адресован руководителям и специалистам финансовых экономических служб предприятий и предназначен для автоматизации бюджетного процесса. Основные возможности модуля:

- ü Построение и внедрение единой в рамках всей организации и её подразделений системы бюджетирования – взаимосвязанного набора финансовых планов, в том числе: бюджетов доходов и расходов, прибыли и убытков, движения денежных средств, налогового, инвестиционного бюджетов, прогнозного баланса и других. Обеспечиваются возможности быстрого и гибкого изменения и перенастройки системы бюджетирования, представление информации в стоимостном, количественном и ценовом измерениях, произвольных аналитических разрезах. Использование пользовательских алгоритмов при настройке способов расчета обеспечивает высочайший уровень гибкости в расчетах показателей бюджета.
- ü Многовариантность финансового планирования – обеспечиваются возможности для составления финансовых планов, относящихся к различным горизонтам планирования (стратегические, тактические и оперативные финансовые планы), различных вариантов (сценариев) финансовых планов, их сравнение, агрегация и декомпозиция.
- ü Координация и согласование финансовых планов – планирование, сборка, декомпозиция и корректировка бюджетов (обеспечиваются методики согласования «сверху вниз» и «снизу вверх»).
- ü Многовалютное представление показателей бюджета, использование в расчетах возможностей учета динамики внешних факторов (темпов инфляции, прогнозных курсов валют, ценовых индексов и пр.).
- ü Оперативный контроль над фактическим исполнением бюджетов, сбор и консолидация данных о фактическом исполнении бюджета из модулей бухгалтерского и оперативного учета системы «Галактика ERP», расчет агрегированных (как по центрам ответственности, так и по периодам времени) и консолидированных бюджетов.
- ü Поддержка принятия оперативных управленческих решений (акцепт счета, согласование условий договора) за счет обеспечения доступа к данным об исполнении бюджета непосредственно из первичных документов.

- ü Анализ исполнения бюджетов посредством сравнения планируемых и фактических показателей, представление информации в графическом виде, доступ к источникам первичных данных (вплоть до исходных хозяйственных документов), экспорт/импорт и представление отчетности в различных электронных формах данных.
- ü Распределение прав доступа к информации, построение организационной схемы системы бюджетирования, «ролевое» управление процессом бюджетирования, эргономичное администрирование системы [2].

Начальный этап работы с модулем «Управление бюджетом» заключается в первоначальной настройке следующих каталогов и справочников.

1. Формирование центров ответственности.

Работа с модулем «Управление бюджетом» начинается с формирования структуры центров ответственности путем добавления записей в *Каталог центров ответственности* (рисунок 1).



Наименование	Сокращен	Код
Мебель		01
Администрация	Адм	01
Коммерческий отдел	КО	02
Производственный отдел	ПО	03

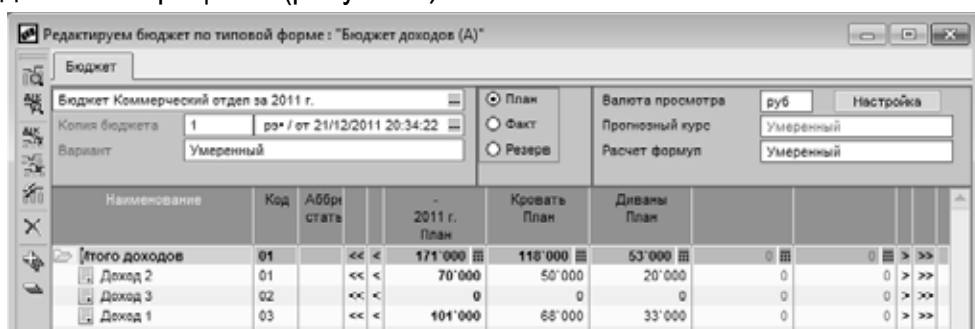
Рисунок 1 – Каталог центров ответственности

2. Создание периодов планирования.

В соответствующем справочнике необходимо сформировать годовые периоды планирования, каждый из которых включает четыре квартала.

3. Формирование аналитик, групп аналитик и аналитик бюджетирования для особого выделения заранее определенных аналитических признаков при бюджетировании.
4. Формирование статей бюджета, в том числе расчетных.
5. Формирование типовых форм бюджета, которые представляют собой шаблон с иерархией статей и аналитик и определяют визуальное представление бюджета.
6. Настройка алгоритмов формирования значения статей бюджетов путем преобразования многомерных данных и расчета статистических величин.

Формирование бюджетов выполняется в соответствии с заданными в процессе запуска функции параметрами: центра ответственности, периодов планирования, варианта и стадии бюджетного процесса (рисунок 2).



Наименование	Код	Аббре- ста	2011 г. План	Кровать План	Диваны План			
Итого доходов	01		171'000	118'000	53'000	0	0	>>>
Доход 2	01		70'000	50'000	20'000	0	0	>>>
Доход 3	02		0	0	0	0	0	>>>
Доход 1	03		101'000	68'000	33'000	0	0	>>>

Рисунок 2 – Сформированный бюджет доходов на 1-й квартал

После того, как сформированы фактические показатели бюджетов, проводят простейший анализ исполнения бюджетов путем расчета процентов выполнения плана (рисунок 3).

	План	Факт	Процент выполнения
Услуга 1	146'800	147'125	100
Услуга 2	60'000	72'973	121

Рисунок 3 – Анализ исполнения бюджета

Внедрение предложенной в «Галактика ERP» системы автоматизированного бюджетирования на предприятии позволит руководству получить возможность прогнозирования состояния предприятия, повысить уровень информированности, финансовую прозрачность предприятия, а также его инвестиционную привлекательность.

Список цитированных источников

1. Змитрович, А.И. Информационные технологии для финансовых менеджеров: пособие / А.И. Змитрович [и др.]; под ред. А.И. Змитровича. – Мн.: Издательский центр БГУ, 2009. – 480 с.
2. Корпорация «Галактика». Базовая документация. Версия 9.10. Эталонный диск № 91_11_10.14.

УДК 614.8 (43)

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Беглякова М.С.

*Командно-инженерный институт МЧС РБ, г. Минск
Научный руководитель: Шамукова Н.В., к.физ.-мат.н., доцент*

В настоящее время остро стоит проблема предупреждения чрезвычайных ситуаций, наносящих ежегодно серьезный экономический ущерб многим регионам страны. Центральное место среди задач обеспечения эколого-экономической безопасности занимает задача прогноза возникновения чрезвычайной ситуации. Другой важной задачей является задача оценки возможного экономического ущерба. На сегодняшний день существует большое количество разного рода моделей прогноза чрезвычайных ситуаций, но они, как правило, не универсальны и имеют довольно узкую область применения. Реализация моделей и методов прогноза на практике осуществлялась как с помощью пакетов прикладных программ Statistica 6.0, Maple и MS Excel, так и с помощью специально разработанных для этих целей программных продуктов.

В основе прогнозирования лежат три взаимодополняющих источника информации о будущем. Во-первых, оценка перспектив развития, будущего состояния прогнозируемого явления на основе опыта, чаще всего при помощи аналогии с достаточно хорошо известными сходными явлениями и процессами. Во-вторых, условное продолжение в будущее (экстраполяция) тенденций, закономерности развития которых в прошлом и настоящем обладают высокой степенью инертности. В-третьих, модель будущего состояния того или иного явления, процесса, построенная сообразно ожидаемым или желательным изменениям ряда условий, перспективы развития которых достаточно хорошо известны.

По периоду упреждения прогнозы подразделяются на оперативные, краткосрочные, среднесрочные, долгосрочные и дальнесрочные.

Таблица 1 – Типология прогноза

Тип прогноза	Период прогнозирования, лет	Содержательные отличия прогнозов
Оперативный	до 1	Нет существенных количественных изменений
Краткосрочный	1...3	Происходят количественные изменения
Среднесрочный	5...7	Наблюдаются количественные и качественные изменения
Долгосрочный	10...20	Наблюдаются количественные и качественные изменения, с доминированием качественных изменений
Дальнесрочный	более 20	Качественные изменения

Примечание – Источник: [1, с 25]

Стихийные бедствия возникают внезапно, однако, их последствия могут быть предотвращены или существенно уменьшены при осуществлении предупредительных мер.

Автором предпринята попытка расчета прогноза с учетом сезонного фактора количества техногенных чрезвычайных ситуаций в Республике Беларусь на основе оперативных данных МЧС Республики Беларусь за 2010–2014 гг.

Получено уравнение прогноза $\hat{y} = 2179,73x - 26,29$, коэффициенты которого рассчитаны в среде MS Excel по методу наименьших квадратов. Разработан шаблон прогнозных расчетов.

В связи с тем, что возникновение чрезвычайных ситуаций носит вероятностный характер, прогноз полученный на основе разработанного шаблона является оперативным.

Автор ознакомился с возможностями программы Forecast4AC PRO, которой пользуются более 3000 компаний и физических лиц. Среди них такие как Kimberly-Clark, Сбербанк, "Натур Продукт", BATTERY TEAM и др. Был проведен сравнительный анализ возможностей программы, которая является специальной надстройкой MS Excel.

С использованием Forecast4AC PRO прогноз чрезвычайных ситуаций может носить краткосрочный характер.

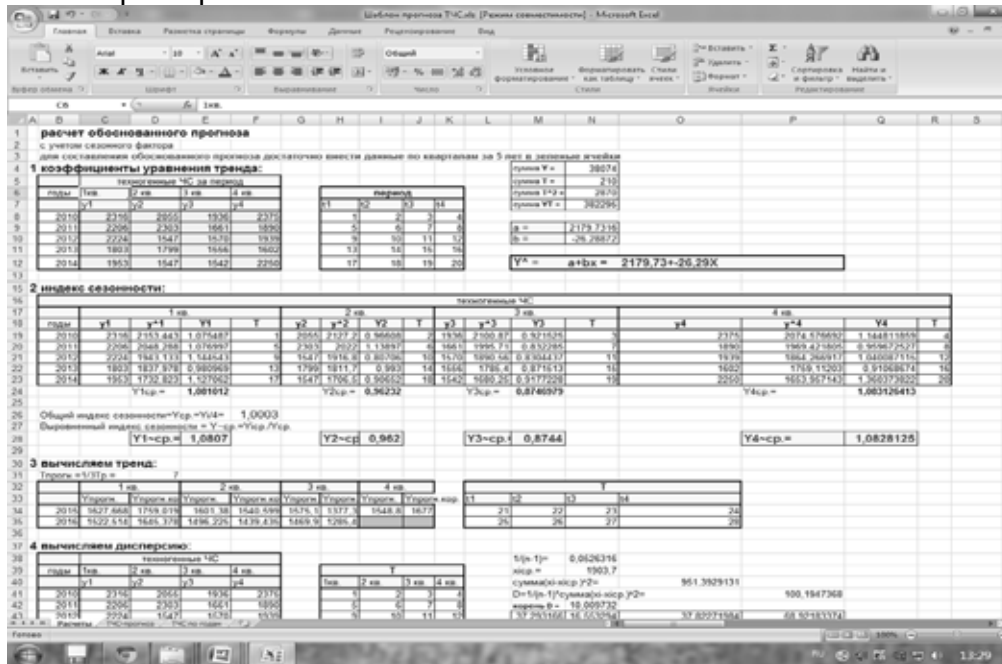


Рисунок 1 – Разработанный шаблон прогноза техногенных чрезвычайных ситуаций

Таблица 2 – Сравнительный анализ программ

Характеристика	MS Excel	Forecast4AC PRO
Требуемые знания статистики и эконометрики	средние или углубленные	невысокие
Автоматизированный интеллектуальный выбор метода прогнозирования	отсутствует	есть
Количество готовых прогнозных моделей	не более 5	свыше 30
Агрегация и форсирование прогнозов по иерархии	отсутствует	есть
Отслеживание многопользовательских корректировок	отсутствует	есть
Время на разработку полноценного прогноза (от загрузки данных до результата расчёта)	не менее часа	менее 10 минут
Подготовка исходных данных	минимальная	адаптация под заданный формат
Интеграция с информационными системами	сопоставимая	
Расчёт критериев точности и достоверности прогноза	только ручной	автоматический
Изменение параметров прогнозных моделей	трудоемкое	лёгкое
Техническая поддержка по задачам прогнозирования	отсутствует	есть, в том числе и в России
Стоимость	сопоставимая	

Список цитированных источников

1. Тихомиров, Н.П. Методы социально-экономического прогнозирования / Н.П. Тихомиров, В.А. Попов – М.: Изд-во ВЗПИ, А/О «Росвузнаука», 2008.

УДК 519.713

ПРОГРАММНОЕ СРЕДСТВО ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В ОДНОЭЛЕМЕНТНОМ БАЗИСЕ

Гутников В.С., Тузик И.В.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

При проектировании сложных цифровых устройств используется представление соответствующих логических функций в некотором базисе. Базис может быть образован одной или несколькими логическими функциями. Стандартными и хорошо изученными являются базисы, образованные функциями одной и двух переменных. Возможность использования в качестве базиса функций трех и более переменных не столь широко представлена в соответствующей литературе.

В данной работе рассматривается программное средство [1], разработанное одним из авторов, позволяющее для практически любой логической функции проверить возможность использования ее в качестве базиса. Если функция образует базис, то программа предлагает варианты представления в этом базисе констант нуля и единицы, отрицания и конъюнкции.

В разработанном программном средстве реализован следующий подход [2].

Отрицание одной переменной строится либо на соседних наборах, на которых нарушается монотонность базисной функции g , либо выражается через g как $\bar{g} = g(x, x, \dots, x)$. На противоположных наборах, на которых нарушается самодвойственность функции g , строятся константы нуля и единицы, либо только одна из них, тогда другая получается как отрицание первой.

Для построения конъюнкции фиксируются все переменные, кроме двух, так, чтобы полином Жегалкина базисной функции g принял вид:

$$xy \bar{a}x \bar{b}y \bar{g} \text{ где } a, b, \bar{g} \in \{0, 1\}.$$

Тогда конъюнкция двух переменных выражается через функцию g следующим образом (считаем, что фиксированы все переменные, от которых зависит функция, кроме первых двух):

$$xy = g(x \bar{a}b, y \bar{a}, \text{const}, \dots) \bar{a}b \bar{g}$$

С помощью технологий объектно-ориентированного программирования автором были реализованы соответствующие алгоритмы (в том числе и разработанные самостоятельно), позволяющее выполнить ряд действий над заданной булевой функцией. Разработанная программа позволяет: получить таблицу значений булевой функции, заданной выражением; проверить, образует ли заданная функция базис; в случае положительного ответа, найти в этом базисе представления для констант 0 и 1, а также для отрицания переменной и конъюнкции двух переменных. Программное средство обеспечивает последовательное выполнение указанных действий, позволяет просмотреть этапы решения перечисленных задач, а также по результатам отыскания всех возможных представлений для констант и отрицания получить в заданном базисе оптимальное представление для конъюнкции. Полученные результаты в дальнейшем можно использовать для представления в заданном базисе произвольной логической функции.

Данное программное средство избавляет пользователя от трудоемкого поиска подходящих вариантов представления конъюнкции в одноэлементном базисе путем перебора вручную.

Список цитированных источников

1. Гутников, В.С. Автоматизация представления конъюнкции двух переменных в одноэлементном базисе / В.С. Гутников // Сб. конкурсных научных работ студентов и магистрантов – Брест: Изд. БрГТУ, 2015. – Ч.1 – С. 46–48.
2. Тишин, В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 352 с.

УДК 004.056.5

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИИ CONTENT SECURITY POLICY ДЛЯ ЗАЩИТЫ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ WEB-ПРИЛОЖЕНИЙ

Давыдовский С.В.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск
Научный руководитель: Лещев А.Е., м.т.н.

В данной статье рассматривается технология Content Security Policy, обеспечивающая безопасность пользователей Web-приложений, раскрываются детали ее использования и делается вывод о ее применимости.

Сегодня Web-приложения используются повсеместно. Их используют в том числе финансовые организации, учреждения здравоохранения, туристические и транспортные организации. Все они хранят конфиденциальную информацию о своих клиентах, которая, попав в руки злоумышленника, может нанести большой вред. Потеря доверия клиентов ведет к большим убыткам. Поэтому безопасность является одной из главных забот разработчиков.

Вся безопасность web-приложений основана на принципе одинакового источника (Same Origin Policy), который ограничивает доступ к данным других источников. Однако существуют методы, позволяющие его обойти. Одним из самых распространенных способов атаки на Web-приложения до сих пор остается “межсайтовый скриптинг” (Cross Site Scripting – XSS). По данным OWASP, в 2013 году XSS находился на третьем месте в списке ключевых рисков Web-приложений. XSS позволяет злоумышленнику внедрять свой код на страницу Web-приложения. Этот код выполнится на компьютере клиента, скачавшего эту страницу. Таким образом, злоумышленник может получить доступ к данным пользователя. Традиционные методы борьбы с XSS – кодирование и валидация входных данных. Недостатком этих методов является то, что приходится рассматривать каждый пользовательский ввод и проверять его на вредоносность. Крупные сайты имеют множество форм для ввода клиентских данных, так что уследить за всем становится сложно.

Новый механизм защиты был разработан в Mozilla Foundation. Этот механизм получил название “Политика защиты контента” (Content Security Policy - CSP). Он не защищает от внедрения вредоносного кода, но существенно снижает его вредоносный эффект. CSP определяет список доверенных источников и велит браузеру отправлять запросы только к ним. Таким образом, даже если злоумышленнику удастся внедрить свой код, он не сможет получить никакой информации, поскольку браузер клиента заблокирует запрос на недоверенный источник. В ноябре 2012 года CSP стал кандидатом в рекомендации W3C. В июле 2015 года ему на смену пришел CSP Level 2. По данным *caniuse.com*, на октябрь 2015 года поддержка браузерами CSP 1.0 составляет 87%, CSP Level 2 – 55%.

По умолчанию браузеры работают без CSP. Для его включения необходимо, чтобы страницы Web-приложения имели дополнительный заголовок в HTTP-ответе: *Content-Security-Policy*. Значение заголовка – строка, определяющая одну или более политик безопасности, которые будут использоваться на странице.

Формат CSP-заголовка (абзацы и отступы не должны присутствовать в заголовке):

Content-Security-Policy:

directive source-expression, source-expression, ...;

directive ...;

...

directive – строка, определяющая тип ресурса, *source-expression* – шаблон, описывающий один или более источников, откуда ресурсы могут быть загружены. Список доступных директив:

- | | | | |
|----------------------|--------------------------|-----------------------|---------------------|
| • <i>base-uri</i> | • <i>font-src</i> | • <i>img-src</i> | • <i>report-uri</i> |
| • <i>child-src</i> | • <i>form-action</i> | • <i>media-src</i> | • <i>sandbox</i> |
| • <i>connect-src</i> | • <i>frame-ancestors</i> | • <i>object-src</i> | • <i>script-src</i> |
| • <i>default-src</i> | • <i>frame-src</i> | • <i>plugin-types</i> | • <i>style-src</i> |

Формат *source-expression*: *протокол://домен:порт*. Домен может начинаться с *, что означает любой поддомен. Порт и протокол могут быть * (любой порт и любой протокол), также они могут быть опущены. Можно указать только протокол (к примеру, *https*). Дополнительно, *source-expression* может иметь следующие значения:

- *'none'* – запрещает все источники;
- *'self'* – разрешает только источники, обслуживаемые текущим хостингом (но не поддоменами);
- *'unsafe-inline'* – разрешает использовать инлайн-скрипты, инлайн-стили, *javascript:URLs*;
- *'unsafe-eval'* – разрешает использовать кодогенерацию в JavaScript.

По умолчанию, все ресурсы открыты для загрузки из любых источников. Директива *default-src* позволяет переопределить это поведение.

Пример CSP-заголовка:

Content-Security-Policy:

```
script-src 'self' scripts.example.com;  
media-src 'none';  
img-src *;  
default-src 'self' http://*.example.com
```

В данном примере страница может загружать скрипты только из текущего хостинга и из *scripts.example.com*, аудио- и видеофайлы недоступны с любых источников, картинки могут быть загружены откуда угодно, все остальные ресурсы могут быть доступны из текущего хостинга и с любого поддомена *example.com*.

CSP можно включить также напрямую в разметке страницы, используя тэг *<meta>* с атрибутом *http-equiv*. Пример:

```
<meta http-equiv="Content-Security-Policy" content="script-src 'self' scripts.example.com; media-src 'none'; img-src *; default-src 'self' http://*.example.com">
```

В *<meta>* нельзя использовать директивы *frame-ancestors*, *report-uri* и *sandbox*.

CSP 1.0 позволяет либо полностью запретить инлайн-скрипты, либо разрешить их использование (по умолчанию, инлайн-скрипты отключены, для их включения нужно указать *'unsafe-inline'* у директивы *script-src*). Поскольку самая большая угроза от XSS-атак – внедрение кода на страницу – рекомендуется полностью отказаться от них. Если же все-таки без них нельзя обойтись, CSP, Level 2 предлагает решения. Можно добавить атрибут *nonce* к инлайн-скриптам. Значение атрибута *nonce* – уникальное токен-значение, которое меняется при каждом запросе. В CSP-заголовке, соответственно, у директивы *script-src* нужно указать тот же самый токен. Таким образом, известные инлайн-скрипты (с атрибутом *nonce*) будут выполнены, а неизвестные (без атрибута *nonce* либо если значение *nonce* не совпало со значением в директиве) будут заблокированы. К примеру:

```
<script nonce="EDNnf03ncelOfn39fn3e9h3sdfa">...</script>
```

Content-Security-Policy: script-src 'nonce-EDNnf03ncelOfn39fn3e9h3sdfa' Есть и другой способ. Можно взять хэш от инлайн-скрипта (от кода между

```
<script>...</script>
```

) и в директиве указать это хэш вместе с алгоритмом хэширования. Пример:

```
<script>alert('Hello, world.');
```

Content-Security-Policy: script-src 'sha256-qznLcsROx4GACP2dm0UCKCzCG-HiZ1guq6ZZDob_Tng='CSP способен отправлять уведомления о заблокированных источниках на сервер, так что можно проанализировать и исправить уязвимости. Уведомление передается в формате JSON, где указаны заблокированные источники, нарушенные директивы и другая информация. Для того, чтобы браузер отправлял POST-запросы на сервер, необходимо указать директиву *report-uri* и путь, куда посылать уведомления, к примеру: *Content-Security-Policy: default-src 'self'; ...; report-uri /my_csp_report_parser*. Существует заголовок *Content-Security-Policy-Report-Only*, использование которого не блокирует недоверенные источники, но посылает о них отчеты на сервер. Можно использовать два заголовка одновременно.

Использование CSP значительно повышает защиту от XSS-атак, однако эта защита не является стопроцентной. Злоумышленники могут обойти CSP с помощью внедрения собственных директив, могут использовать новые способы отправки данных на сторонние сайты без JavaScript (CSS Attribute Reading, SVG-кейлоггер и др.). Несмотря на это, CSP – большой шаг в сторону безопасного веба. Его можно и нужно использовать уже сейчас.

Список цитированных источников

1. World Wide Web Consortium [Электронный ресурс], 2015. – Режим доступа : <http://www.w3.org/TR/CSP2>. – Дата доступа: 10.10.2015.
2. An Introduction to Content Security Policy [Электронный ресурс] / Mike West, 2015. – Режим доступа: <http://www.html5rocks.com/en/tutorials/security/content-security-policy>. – Дата доступа: 10.10.2015.

УДК 004.4

ТИПИЗАЦИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ПЕЧАТНЫХ ФОРМ ДЛЯ СИСТЕМ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ

Дулуб В.В.

Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: С.В.Мухов, к.т.н., доцент

При проектировании компьютерных систем экономической направленности вследствие их специфики, как правило, выделяют списковые и итоговые печатные формы. При этом, как правило, используют фильтр для уточнения области выбираемых данных типа интервального задания временного интервала и указания объекта, для которого необходимо сформировать печатную форму.

Для реализации формирования печатной формы необходимо предварительно сформировать промежуточный набор данных с помощью соответствующего запроса и передаче сформированного набора данных в программу генерации печатной формы с использованием соответствующего шаблона печатной формы с указанием уровней отчета и суммируемых полей. Для реализации запроса с указанием фильтра будем использовать таблицу «Настройки системы» для ввода и хранения параметров фильтра. Для ввода параметров фильтра можно использовать типизированную экранную форму ввода данных в таблицу «Настройки системы». В случае формирования списковой печатной формы, включающей все объекты распечатываемой таблицы, таблица «Настройки системы» не используется. В системах экономической направленности, как правило, в качестве фильтра используется задание интервала времени для выбираемых операций и объект или группа объектов для выборки в печатную форму. В качестве объекта в системах экономической направленности могут служить синтетические счета, субсчета и признаки аналитического учета, используемые в балансовых экономических моделях.

При формировании печатной формы типа *список всех объектов таблицы* выполняем:
– создаем запрос с использованием на входе данной таблицы для всех или только необходимых для отчета полей;
– создаем отчет на базе ранее сделанного запроса.

В качестве примера такой печатной формы может служить распечатка произвольного небольшого справочника, в котором задание фильтров не имеет смысла.

При формировании печатной формы типа *список объектов таблицы с использованием фильтра* выполняем:

- создаем запрос с использованием на входе данной таблицы для всех или только необходимых для отчета полей и таблицы «Настройки системы»;
- добавляем в список выбираемых полей необходимые для создания фильтра поля из таблицы «Настройки системы». Отметим, что ввод полей в таблицу «Настройки системы» выполняется с помощью типизированной экранной формы «Ввод для формирования»;

- указываем условия для выборки записей. Отметим, что в ранее созданном запросе имеются все поля, необходимые для формирования фильтра;
- создаем отчет на базе ранее сделанного запроса.

В качестве примера такой печатной формы может служить классическая оборотно-сальдовая ведомость по синтетическому счету за определенный период времени. В качестве фильтра при выборке операций используется интервал времени и синтетический счет.

При формировании печатной формы типа *итоговая отчетная форма* для объектов таблицы отрабатывают создание запроса и отчета согласно ранее указанной методике для формирования списка объектов таблицы с использованием фильтра. При этом, как правило, в печатной форме не отображают данные по конкретным записям таблицы и используют многоуровневое вложение уровней отчета в описании отчета.

В качестве примера таких печатных форм могут служить классические журнал-ордер и балансовая ведомость по синтетическому счету за определенный период времени. В качестве фильтра при выборке операций используется интервал времени и синтетический счет.

Использование таблицы «Настройки системы» для хранения параметров для задания фильтров выгодно, во-первых, по причине простой и типизированной реализации, и, во-вторых, в силу минимизации ввода параметров, определяющих печатные формы. Например, достаточно однократного ввода расчетного интервала при формировании месячной отчетности.

Предлагаемая типизированная методика формирования печатных форм была отработана в рамках дисциплин информационного профиля экономических специальностей с использованием MS Access и DBase ориентированной среды FoxPro. Отметим, что в DBase системах к разным запросам может быть «привязан» один шаблон печатной формы с вытекающей отсюда более высокой производительностью труда программиста.

Таким образом, при разработке систем экономической направленности с помощью трех типовых методик создания печатных форм вполне реально реализация печатных форм в достаточно сложных программных проектах.

УДК 004.4

ВОПРОСЫ ОЦЕНКИ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА АСОИ

Кисель Н.В.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Научный руководитель: Хвещук В.И., к.т.н, доцент

В работе предложен модельный подход для оценки затрат (временных, стоимостных) для жизненного цикла (ЖЦ) автоматизированных систем обработки информации (АСОИ). АСОИ представляется как отдельный вид автоматизированной системы [1].

В основу модельного подхода положены следующие положения:

§ системный подход к представлению АСОИ в виде совокупности четырёх типов системных элементов (программных, технических, информационных, организационных), автоматизирующих деятельность человека по переработке информации путём применения информационных технологий (ИТ). В общем случае, структура как АСОИ, так и её отдельных элементов может иметь иерархическую структуру [1];

§ выделение типовых видов разработки АСОИ – новая, модернизация, готовая и другие;

§ представление ЖЦ АСОИ в виде совокупности стадий [1], перечень которых определяет разработчик. Для каждого вида разработки существует свой набор стадий ЖЦ АСОИ;

§ процессный подход к представлению отдельной стадии ЖЦ АСОИ на основе [1]. Для каждого типа системных элементов существует свой набор процессов. Так, для программных элементов используется набор специальных процессов [3], для информационных элементов можно применять набор процессов, определённых в [3];

§ определение следующих экономических показателей (ЭП) для оценки ЖЦ АСОИ: стоимость — затраты в денежном выражении; трудоёмкость — затраты труда, выражающиеся в человеко-часах (человеко-месяцах); длительность — время необходимое для реализации АСОИ (календарное время);

§ применение известных и разработка новых методов и методик оценки ЭП [2] для отдельных процессов для элементов АСОИ.

Общая модель оценки ЭП для одноуровневой модели АСОИ представляется в виде:

$$\text{ЭП (ВР)} = \sum_{i=1}^p \text{СТ}_i, \quad (1)$$

где ВР — вид разработки АСОИ, а СТ_i — оценка ЭП для i -й стадии ЖЦ АСОИ, p — количество стадий в ЖЦ.

Оценка ЭП для i -й стадии ЖЦ АСОИ представляется в виде:

$$\text{СТ}_i = \sum_{k=1}^{n1} \text{ПЭ}_k + \sum_{l=1}^{n2} \text{ТЭ}_l + \sum_{m=1}^{n3} \text{ИЭ}_m + \sum_{s=1}^{n4} \text{ОЭ}_s, \quad (2)$$

где ПЭ_k — оценка ЭП для k -го программного элемента (ПЭ) АСОИ на i -й стадии ЖЦ, $n1$ — количество ПЭ в АСОИ;

ТЭ_l — оценка ЭП для l -го технического элемента (ТЭ) АСОИ на i -й стадии ЖЦ, $n2$ — количество ТЭ в АСОИ;

ИЭ_m — оценка ЭП для m -го информационного элемента (ИЭ) АСОИ (базы данных и документы) на i -й стадии ЖЦ, $n3$ — количество ИЭ в АСОИ;

ОЭ_s — оценка ЭП для s -го организационного элемента (ОЭ) АСОИ на i -й стадии ЖЦ, $n4$ — количество ОЭ в АСОИ.

Для каждого типа системного элементов АСОИ используются свои методы и подходы для оценки ЭП [2]. Для ТЭ предполагается, что используются готовые элементы (компьютеры, отдельные устройства и другие) и оценки основываются на справочных данных о стоимости оборудования. Для оценки ИЭ (отдельные файлы, базы данных, хранилища данных и т.д.) в основном используется экспертный подход, а также разработаны алгоритмические методы, полагающиеся на такие факторы, как количество таблиц и атрибутов, сложность связей и другие. При оценке ПЭ для ОЭ (отдельные сотрудники, подразделения и т.д.) применяются статистические и экспертные данные по оценке затрат на эксплуатацию ПЭ, ТЭ и ИЭ АСОИ. Наиболее сложной компонентой АСОИ являются ПЭ (программы, комплексы программ), методы для их оценки делятся на следующие группы [3]:

1. Экспертные методы. Оценка стоимости основывается только на мнении эксперта или экспертов.

2. Метод аналогии.

3. Параметрические (алгоритмические) методы. Используют математические формулы для определения стоимости, основываясь на определённых параметрах проекта [3]. Наиболее известными являются методы СОСОМО, СОСОМО II и другие. Данные методы могут использовать как функциональные точки, так и количество строк кода для определения размера ПЭ.

4. Методы, основанные на машинном обучении: нейронные сети; нечёткая логика; генетические алгоритмы; data mining; гибридные методы.

Универсального метода для определения оценки ЭП для АСОИ и/или её отдельных элементов не существует. Поэтому в рамках данной работы предложена общая модель для оценки ЭП для ЖЦ АСОИ и её отдельных элементов. На основе её создаётся программный комплекс, позволяющий пользователю: описывать структуру АСОИ; задавать ВР; выбирать для каждого элемента АСОИ и процесса ЖЦ метод для оценки ЭП; проводить расчёт ЭП ЖЦ АСОИ или отдельного компонента. При выборе метода оценки пользователь может учитывать специфику проекта, его уникальность, размер и другие факторы.

Список цитированных источников

1. ISO/IEC 15288:2008. System and software engineering. System life cycle processes.
2. Липаев, В.В. Экономика программной инженерии заказных программных продуктов: учебное пособие. — М.: МАКС Пресс, 2014. — 148 с.
3. Хвещук, В.И. Базы и банки данных: методическое пособие по курсовому проектированию по дисциплине / В.И. Хвещук, Ю.Б. Крапивин, Г.Л. Муравьев — Брест: БрГТУ, 2012. — 76 с.

УДК 657:004.22

МЕТОДИКА АВТОМАТИЗАЦИИ УЧЕТА В СООТВЕТСТВИИ С МСФО ДЛЯ ФИЛИАЛА «СЛОНИМСКАЯ МПМК–164» ООО «ГРОДНООБЛСЕЛЬСТРОЙ»

Котко Т.В.

Брестский государственный технический университета, г. Брест

Научный руководитель: Аверина И.Н.

На сегодняшний день филиал «Слонимская МПМК–164» ООО Гроднооблсельстрой разрабатывает ряд проектов по увеличению прибыли от строительной деятельности посредством участия в тендерах как на территории Республики Беларусь, так и за ее пределами. Для этого предприятие оформляет заявку поставщика, которая должна соответствовать следующим требованиям: высокое качество поставленного материала; своевременная скорость выполнения работ; технические характеристики поставляемых товаров; стоимость проекта, не превышающая цену, установленную заказчиком при объявлении начала тендера. При этом заказчик запрашивает отчет о финансовом состоянии предприятия для того, чтобы убедиться в его способности осуществить проект. В связи с этим у предприятия возникает ряд сложностей по формированию отчетности для зарубежных компаний, в тендерах которой они принимают участие, так как зарубежные организации требуют предоставить финансовые отчеты в соответствии с международными стандартами.

Для предоставления финансовой отчетности по МСФО предприятию требуется достаточно большой отрезок времени для ее трансформации, что вызывает сомнения в стабильности предприятия и заказчик отказывается от услуг данного субъекта. Результатом проигранного тендера, естественно, является потерянная прибыль.

С целью более эффективной работы предприятия, сокращения затрат и времени на трансформацию отчетности по МСФО предприятию предлагается выполнить доработку системы "1С: Бухгалтерия 8", которая будет связана с разработкой методики автоматизации учета в соответствии с международными стандартами финансовой отчетности [1].

Методика предусматривает автоматизацию формирования финансовой отчетности методом трансформации с использованием дополнительно разработанного модуля к программе "1С: Бухгалтерия 8".

Для создания дополнительного модуля к используемому программному обеспечению будет разработан алгоритм выполнения определенных действий, позволяющий трансформировать данные из автоматизированной системы бухгалтерского учета согласно национальным стандартам бухгалтерского учета в модуль формирования отчетности в соответствии с МСФО.

Автоматизация формирования отчетности в соответствии с международными стандартами финансовой отчетности будет состоять из трех этапов: подготовительного, основного и заключительного.

На подготовительном этапе необходимо разработать и настроить учетную политику и разработать дополнительный план счетов в соответствии с МСФО (рисунок 1), а также разработать руководство по трансформации и консолидации финансовой отчетности в программе "1С: Бухгалтерия 8".

Для проведения трансформации необходимо настроить таблицу соответствия счетов рабочего плана предприятия счетам МСФО (рисунок 2), а также установить правила переноса проводок, т.е. разработать конвертационные проводки для корректировки полученных данных в соответствии с МСФО.

Код	Наименование	Наименование английское	Заб.	Акт.	Вал.	Кол.	Под.	Субконто 1	С...	С...
5662	Выпуск прочих долевых инструментов	Issuing other equity instruments		АП	✓			Контрагенты	Д...	Ц...
5663	Погашение прочих долевых инструментов	Retirements of other equity instruments		АП	✓			Контрагенты	Д...	Ц...
5670	Государственные субсидии	Government grants		АП	✓					
5671	Субсидии, относящиеся к активам	Grants related to assets		АП	✓			Контрагенты	Д...	
5672	Субсидии, относящиеся к доходам	Grants related to income		АП	✓			Контрагенты	Д...	
5811	Прочие краткосрочные нефинансовые обязатель...	Other current non-financial liabilities		П	✓					
5911	Краткосрочные обязательства включенные в гру...	Liabilities included in disposal groups classified as held...		П	✓					
6000	Доходы	Income		АП						
6100	Выручка от основной деятельности	Revenue		АП						
6110	Выручка от основной деятельности	Revenue		АП						
6111	Выручка от продажи товаров	Revenue from sale of goods		П				(об) Номенк...		
6112	Выручка от оказания услуг	Revenue from rendering of services		П				(об) Номенк...		
6113	Выручка по договорам подряда	Revenue from construction contracts		П				(об) Номенк...		

Рисунок 1 – Дополнительный план счетов в соответствии с МСФО

На основном этапе разрабатывается трансформационная модель и осуществляется перенос учетных данных. Модель состоит из трансформационных таблиц, разработанных на базе конфигурации "1С: Бухгалтерия 8", которые должны содержать данные из оборотно-сальдовой ведомости по предприятию, номер и название корректировки, необходимые для раскрытия информации согласно международным стандартам, и итоговые данные в соответствии с МСФО.

Номер правила	Счет МСФО	Заполнение субконто	Счет БУ	Положение сч...	Отключить правило	Комментарий
00228	3221	Аналитика БУ: Субконто1 Аналитика БУ: Субконто2 Аналитика БУ: Субконто3	84.02	Произвольное	Исключить трансля... Сложный отбор	
00229	3221	Аналитика БУ: Субконто1 Аналитика БУ: Субконто2 Аналитика БУ: Субконто3	84.03	Произвольное		
00230	3221	Аналитика БУ: Субконто1 Аналитика БУ: Субконто2 Аналитика БУ: Субконто3	84.04	Произвольное		
00231	5671	Аналитика БУ: Субконто1 Аналитика БУ: Субконто2	86.01	Произвольное		

Рисунок 2 – Соответствия счетов бухгалтерского учета МСФО

На заключительном этапе проверяется фактическое формирование отчетности в соответствии с МСФО на основании отдельной оборотно-сальдовой ведомости, данные в которую переносятся на отчетную дату путем переноса проводок с помощью генератора отчетов. Особое внимание при проверке на данном этапе уделяется валюте баланса: так баланс по национальным стандартам должен формироваться в рублях, а согласно МСФО – в иностранной валюте.

Следует отметить, что разработанная методика автоматизированной системы для подготовки отчетности в соответствии с МСФО соответствует требованиям, предъявляемым к автоматизированной системе для подготовки отчетности в соответствии с МСФО, а именно:

- наличие механизмов проверки внутренней сбалансированности, полноты и целостности данных. Ведение нескольких таблиц связей счетов;
- поддержка механизма проводок для выполнения сбалансированных сложных корректировок;

– автоматическое выполнение корректировки по настроенным шаблонам и выверенным алгоритмам расчета сумм проводок;

– трансформация на основе механизма проводок по различным статьям Плана счетов в соответствии с МСФО. Поддержка детализации значений статей для получения расшифровок [2].

Таким образом, разработанная методика автоматизации финансовой отчетности в соответствии с МСФО обеспечивает:

- ведение финансового учета и подготовку финансовой отчетности по международным стандартам с минимальными затратами времени;
- трансформацию большей части учетных записей (проводок) бухгалтерского учета;
- параллельное ведение учета по национальным и международным стандартам на участках, где различия между национальными требованиями и МСФО существенны (например, учет основных средств, нематериальных активов, материально-производственных запасов);
- проведение регламентных документов (учет резервов, обесценение активов и др.), а также внесение корректирующих записей вручную.

Список цитированных источников

1. 1С: Бухгалтерия // 1С- ЮКОЛА [Электронный ресурс]. – 2015. – Режим доступа: <http://www.jukola.com.by/soft/1cv8/bp.php>. – Дата доступа: 25.09.2015.
2. Требования к системе, автоматизирующей учет по МСФО // Учет и отчетность [Электронный ресурс]. – 2015. – Режим доступа: <http://fd.ru/articles/14634-trebovaniya-k-sisteme-avtomatiziruyushchey-uchet-po-msfo>. – Дата доступа: 07.09.2015.

УДК 004.514.62

ИНСТРУМЕНТАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ИНТЕРФЕЙСОМ ОФИСНЫХ ПАКЕТОВ

Латуй О.О.

*Брестский государственный технический университет
Научный руководитель: Костюк Д.А., к.т.н., доцент*

Начиная с 90-х годов и до недавнего времени графические интерфейсы всех популярных офисных приложений придерживались одного и того же принципа построения, когда основные элементы управления (системное меню и панель инструментальных кнопок) располагались непосредственно над макетом документа. Появление в продуктах Microsoft «ленточных» инструментальных панелей (Microsoft Fluent Interface или MFI) можно назвать самой кардинальной GUI-инновацией этой компании со времен изобретения ею панели задач, и при этом самой противоречивой. Помимо переключения содержимого панели с помощью вкладок, MFI присущи следующие особенности:

- отсутствие системного меню;
- деление панели на секции, каждая с виджетами самого разного размера;
- автоматическое переключение вкладок панели в зависимости от прогноза о намерениях пользователя.

В ряде источников отмечено, что MFI нередко обеспечивает доступность нужных элементов в один клик, но взамен совмещение в одной полосе множества элементов чередующихся размеров рождает у пользователя ощущение хаоса. Хотя в ряде популярных приложений под Windows этот подход признается пользователями как минимум приемлемым (иногда – после периода первоначального шока), тем не менее он не набрал достаточной популярности среди сторонних разработчиков на других платформах.

Однако за 8 лет сформировалась категория пользователей, специально натренированных на применение MFI. Поэтому представляет интерес выяснение того, насколько различается эффективность взаимодействия с более традиционными интерфейсами и с MFI у современных пользователей. Попытке прояснить эти вопросы и посвящено настоящее исследование.

Задача оценки состояния пользователя решалась нами в рамках разработки программно-аппаратного комплекса тестирования эффективности человеко-машинного взаимодействия [2], аппаратная часть которого позволяет выполнять мониторинг по трем каналам: два канала используются для одновременного измерения пульса (частоты сердечных сокращений или ЧСС), а третий измеряет электрическую проводимость кожи (ЭПК). Дополнительно по двум каналам ЧСС может оцениваться изменение кровяного давления [2].

ЭПК часто используется как показатель психологического или физиологического возбуждения. Обычно в ЭПК выделяют высокочастотную фазическую и низкочастотную тоническую кожно-гальванические реакции (КГР). Фазическая КГР имеет вид кратковременных импульсов малой длительности, возникающих в ответ на внешние стимулы или на тревогу, напряжение, мыслительную деятельность. Тоническая КГР служит показателем функционального состояния человека [3]. Поскольку на результаты измерений ЭПК заметно влияют как внешние факторы (температура, влажность), так и внутренние (воздействие принятых медикаментов), обычно их используют совместно с регистрацией других показателей (в нашем случае – ЧСС).

Определение ЭПК как электрической характеристики – технически простая задача (дополнительно для выделения фазической составляющей КГР использована фильтрация сигнала с частотой среза, равной 0,05 Гц). Для регистрации ЧСС использован принцип фотоплетизмографии (ФПГ), когда информация об изменении объема крови в тканях считывается оптическим методом [2]. Дополнительно к измерению ЭПК и ЧСС использовался бытовой энцефалограф Neurosky Mindwave, позволяющий оценить концентрацию внимания пользователя с помощью предложенного компанией-разработчиком интегрального параметра «Attention», связанного с β -ритмами головного мозга.

В тестировании приняли участие 23 студента 20–22 лет. Тестируемые выполняли задания в два этапа: сначала в трех приложениях для ознакомления с интерфейсом, а затем другие варианты тех же заданий в режиме мониторинга. Каждый вариант состоял из 16 операций, связанных с форматированием и разметкой документа. Для исследования интерфейсов были выбраны 3 варианта компоновки инструментальных панелей (см. рис. 1):

инструментальная панель в стиле MFI – представлена MS Office 2007;

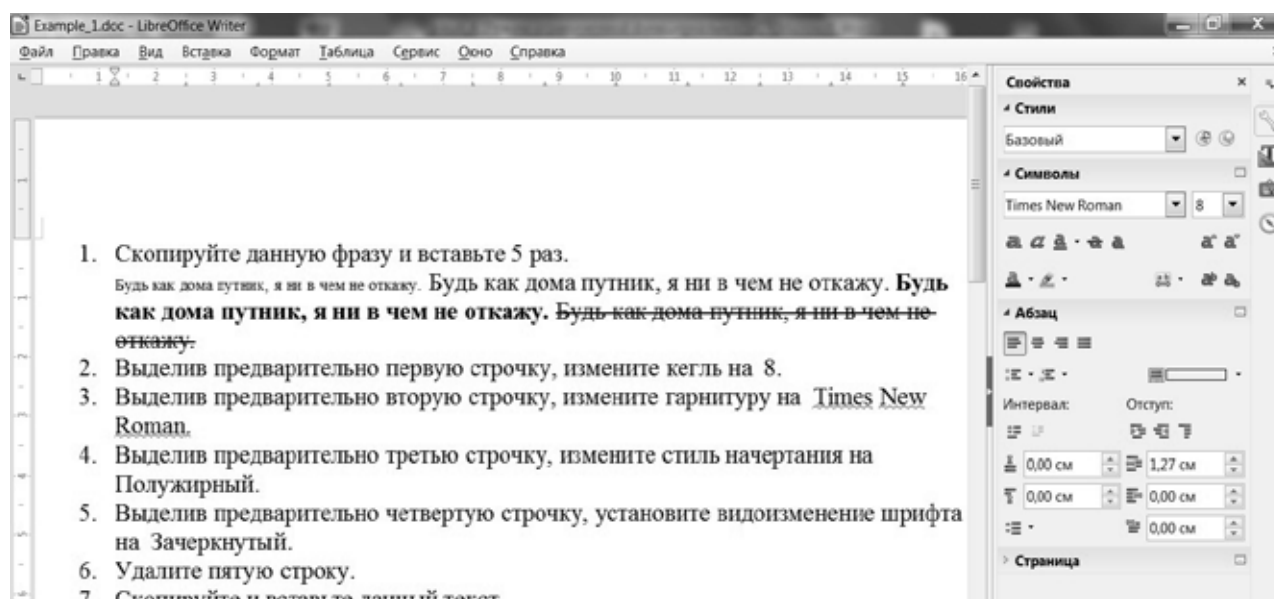
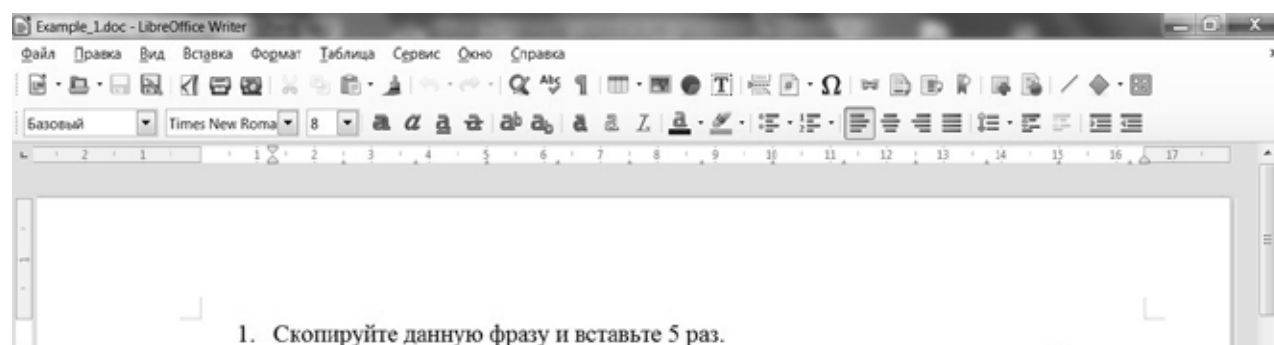
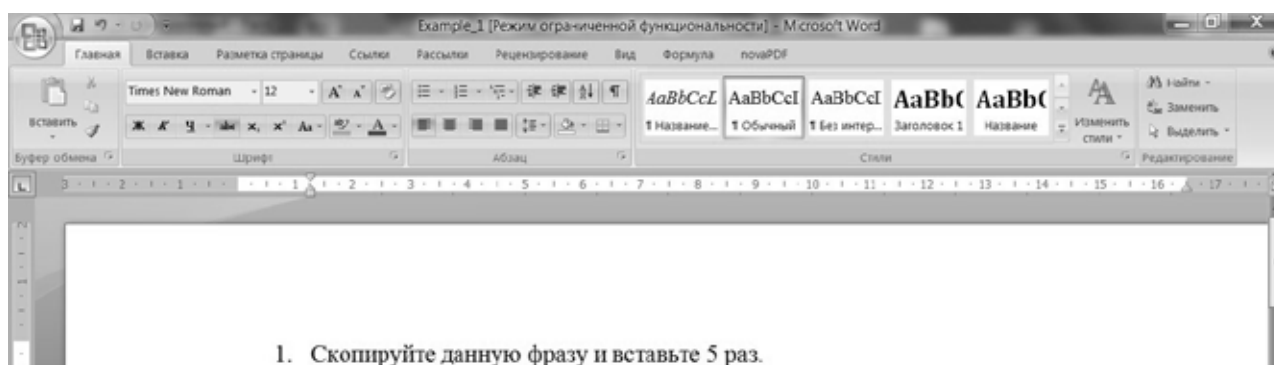
классическая панель сверху экрана – представлена LibreOffice;

боковая панель справа от страницы, содержащая раскрываемые секции (присутствует в IBM Symphony Office, Calligra Office Suite, опционально в LibreOffice) – представлена LibreOffice с отключенной верхней панелью.

Первичная обработка результатов показала, что 58% тестируемых достигли наибольшей скорости работы в MFI, для 32% более быстрая работа отмечена при использовании верхней панели, и только 10% оказались эффективнее при интерфейсе с боковой панелью. При нормировании скорости работы относительно интерфейса с верхней панелью, MFI оказался более быстрым интерфейсом для 63% пользователей (средний выигрыш времени 30%), а для 37% пользователей верхняя панель оптимальнее, чем MFI (причем средний выигрыш времени – те же 30%).

Среди пользователей, для которых MFI наиболее оптимальна, половина показала для MFI более высокую частоту пульса, чем для верхней панели, и 2/3 из них показали меньшую концентрацию внимания при работе с MFI. Среди пользователей, для которых оптимальна верхняя панель, ее использование уменьшало концентрацию внимания только в половине случаев.

Наибольшую фазическую активность КГР вызывал интерфейс с боковой панелью, а наименьшую – MFI. Однако в 1/4 от общего числа тестов ярко выраженные перепады тонической КГР – чаще всего при использовании MFI (и нередко у пользователей, для которых интерфейс MFI оптимален). Аналогичное наблюдение верно и для пользователей, показавших наибольшую скорость для верхней панели – т.е. использование наиболее привычного и эффективного интерфейса не избавляет от длительного эмоционального напряжения.



**Рисунок 1 – Интерфейсы, выбранные для тестирования:
Microsoft Office 2007, LibreOffice с верхней панелью,
LibreOffice с боковой панелью**

Список цитированных источников

1. Костюк, Д.А. Исследование эффективности переключения окон в современных графических интерфейсах / Д.А. Костюк, К.Л. Костюк, С.С. Дереченник, К.А. Тавониус, А.В. Шитиков // Вестник БрГТУ. – 2011. – № 5(71): Физика, математика, информатика – С. 45–48.
2. Костюк, Д.А. Модуль инструментальной оценки состояния пользователя / Д.А. Костюк, О.О. Латий // Открытые технологии: сб-к материалов одиннадцатой международной конференции разработчиков и пользователей свободного программного обеспечения Linux Vacation / Eastern Europe 2015, Гродно, 25–28 июня 2015 г. – Брест: Альтернатива, 2015. – С. 91–95.
3. Benedek, M. A continuous measure of phasic electrodermal activity / M. Benedek, C. Kaernbach // Journal of Neuroscience Methods. – 2010. – № 190 – P. 80–91.

УДК 519.854.2

РЕАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СРЕДАХ ЗАДАЧИ СОСТАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЯ ГОРЯЧЕЙ ОБРАБОТКИ ДЕТАЛЕЙ

Марциновский С.А., Тузик И.В., Хомицкая Т.Г.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Управление производственными линиями на машиностроительных предприятиях осуществляется за счет формирования оптимального расписания загрузки технологического оборудования. Горячая обработка (литье или ковка) отличается тем свойством, что каждая деталь может ожидать обработку только перед первым станком линии, поскольку ожидание обработки перед остальными станками может привести к изменению температурного режима процесса, что является недопустимым. Т.е. войдя в линию, деталь должна обрабатываться непрерывно и последовательно одним станком за другим. В статье рассматривается реализация этапов решения задачи дискретного программирования для составления расписания горячей обработки деталей с использованием встроенных возможностей СКМ Mathematica и ЭТ Excel.

Постановка задачи: На линии горячей обработки, состоящей из нескольких станков $M_s, s = \overline{1, m}$, нужно обработать партию деталей $D_i, i = \overline{1, n}$. Все детали должны проходить по линии в одном направлении через каждый станок. Длительности обработки детали $D_i, i = \overline{1, n}$ каждым станком $M_s, s = \overline{1, m}$ представлены в матрице $P = (p_{s,i}, s = \overline{1, m}, i = \overline{1, n})$. Требуется составить расписание горячей обработки данной партии деталей такое, чтобы общее время обработки всей партии было минимальным.

1 этап. Формируется вспомогательная матрица W , где элементы w_{ij} есть время, которое проходит от начала обработки детали D_i до начала обработки детали D_j на первом станке M_1 , в порядке обработки $D_i \otimes D_j$. Чтобы определить общее время обработки всей партии деталей вводится фиктивная деталь D_{n+1} с длительностью обработки на каждом станке равном 0, т.е. в матрицу P добавим столбец $p_{s,n+1} = 0, s = \overline{1, m}$. Элементы матрицы W вычисляются по формуле [1]:

$$w_{i,j} = \max_{1 \leq h \leq m} \left\{ \bigwedge_{s=1}^h p_{s,i} - \bigwedge_{s=1}^{h-1} p_{s,j} \right\}, i, j = 1, 2, \dots, n+1.$$

Для автоматизации расчета элементов вспомогательной матрицы используется СКМ Mathematica: составлен программный блок (рисунок 1) для формирования матрицы W на основе матрицы P с учетом фиктивной детали.

```

mW[P] := Block[{d, m, n, W, i},
  d = Dimensions[P];
  m = d[[1]]; n = d[[2]];
  W = Table[ Table[
    Max[Table[Sum[P][[s, i]], {s, 1, h}] -
      Sum[P][[s, j]], {s, 1, h-1}], {h, 1, m}],
    {j, 1, n}], {i, 1, n}];
  For[i = 1, i <= n, i++, W[[i, i]] = "-"];
  W]

```

$P = \{\{4, 3, 2, 5, 0\}, \{3, 2, 1, 2, 0\}, \{3, 4, 5, 1, 0\}\};$
$W = mW[P];$ MatrixForm[W]
$\begin{pmatrix} - & 5 & 7 & 4 & 10 \\ 3 & - & 6 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & - & 2 & 8 \\ 5 & 5 & 5 & - & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - \end{pmatrix}$

Рисунок 1 – Формирование вспомогательной матрицы W

2 этап. Составляется математическая модель задачи коммивояжера (задачи дискретного программирования) для матрицы W .

Переменные задачи: (а) $x_{ik}, i, k = \overline{1, n+1}, i \neq k$, – логическая переменная, которая равна либо единице (если сразу же за деталью D_i обрабатывается деталь D_k), либо нулю (в противном случае); (б) $u_i, i = \overline{2, n+1}$, – параметр связанности последовательности обработки деталей.

Целевая функция: общее время обработки всех деталей
$$z = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} w_{ik} x_{ik} \rightarrow \min.$$

Ограничения задачи:

- $\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} x_{ik} \in \{0, 1\}$, – дискретное условие, которое следует из описания переменных
- $\sum_{k=1}^{n+1} x_{ik} = 1, i = \overline{1, n+1}$; – после обработки детали D_i должна обрабатываться в точности одна из имеющихся деталей (за исключением детали D_i)
- $\sum_{i=1}^{n+1} x_{ik} = 1, k = \overline{1, n+1}$; – перед обработкой детали D_k должна обрабатываться в точности одна из имеющихся деталей (за исключением детали D_k)
- $\sum_{i=1}^{n+1} x_{ii} = 0$; – исключение ситуации, когда после детали D_i следует обработка той же детали D_i
- $\sum_{i=1}^{n+1} u_i - u_k + n x_{ik} \in n - 1, i, k = \overline{2, n+1}$, – обеспечение связности последовательности обработки деталей на линии

В ЭТ Excel с помощью надстройки «Поиск решения», предусматривающей использование дискретных ограничений, формируется решение задачи (рисунок 2).

Последовательность обработки деталей определяется по единичным значениям матрицы решения $X = (x_{ij}, i, j = \overline{1, n+1})$, начиная с детали, следующей за фиктивной деталью, т.е. если $x_{n+1, j^*} = 1$, то первой деталью в цепочке будет деталь D_{j^*} .

3 этап. По результатам решения в ЭТ Excel задачи коммивояжера формируется оптимальное расписание в виде диаграммы Ганта в СКМ Mathematica (рисунок 3).

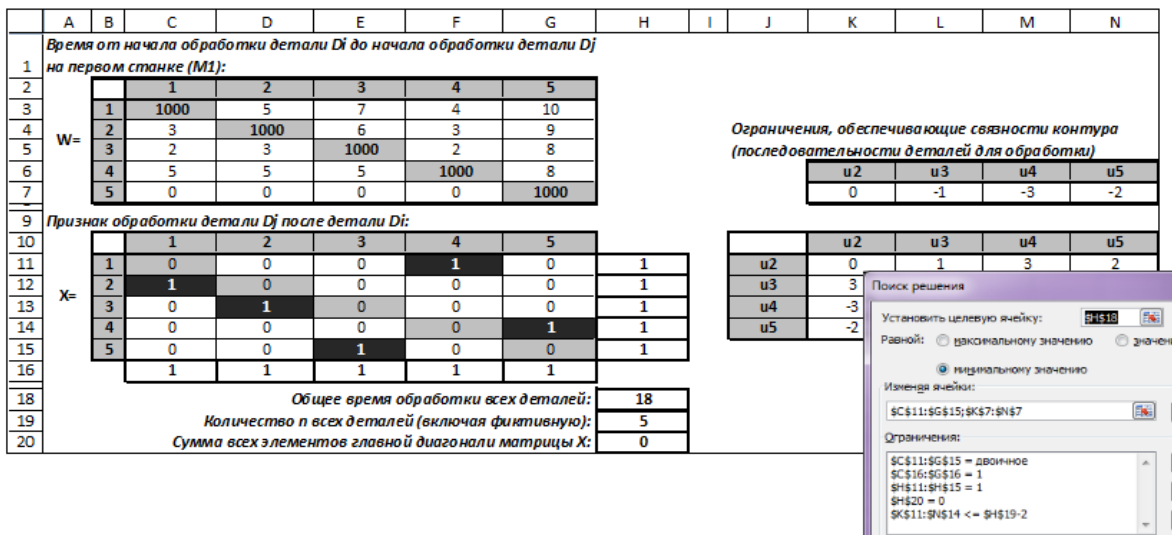


Рисунок 2 – Фрагмент рабочего листа

```

Otv := {3, 2, 1, 4}; T := 18;
R = Rasp[Otv, T]; MatrixForm[R]

```

$$\begin{pmatrix}
 a & a & 0 & b & b & b & a & a & a & a & b & b & b & b & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & b & b & 0 & 0 & a & a & a & 0 & 0 & b & b & 0 \\
 0 & 0 & 0 & a & a & a & a & a & b & b & b & b & 0 & a & a & a & 0 & b
 \end{pmatrix}$$

```

MatrixPlot[R, ColorRules -> {a -> Red, b -> Yellow}, Mesh -> True]

```

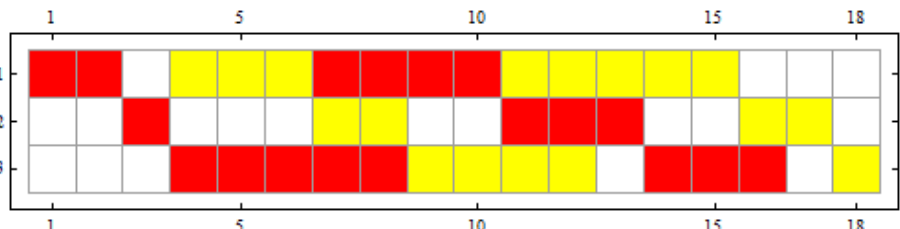


Рисунок 3 – Оптимальное расписание обработки деталей

Список цитированных источников

1. Тимковский, В.Г. Дискретная математика в мире станков и деталей. Введение в математическое моделирование задач дискретного производства / В.Г. Тимковский – М.: Наука, 1992. – 144 с.
2. Тузик, И.В. Методические указания по выполнению контрольной работы по дисциплине «Дискретная математика» / И.В. Тузик, Т.Г. Хомицкая, Л.К. Рамская – Брест: БрГТУ, 2013. – 43 с.

УДК 65.011.56

ЭКАУНТОЛОГИЯ О МЕТОДАХ КОМПЬЮТЕРНОГО УЧЕТА

Николайчук Д.В.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Научный руководитель: доцент Аверина И.Н.

В настоящее время в литературе можно встретить различные названия для автоматизированной формы бухгалтерского учета, в полной мере отражающие ее сущность – компьютерная, таблично-автоматизированная, электронная, таблично-матричная формы бухгалтерского учета. Все эти подходы базируются на методологии бухгалтерского учета и охватывают решение взаимосвязанных вопросов информационного, программного и технического обеспечения.

Экаунтология (от англ. account – счет, отчет, считать и гр. logos – слово, понятие, учение) изучает универсальные возможности учета, независимо от бухгалтерского учета, в первую очередь применительно к компьютерным базам данных. Экаунтология представляет собой синтетическую дисциплину, находящуюся на стыке бухгалтерского учета, философии, информатики и экономики.

Экаунтология рассматривает методологию применения компьютерных баз данных для автоматизированной формы бухгалтерского учета. В рамках экаунтологии разрабатываются методы объективного учета, максимально приближенного к реальности (рисунок 1) [1].

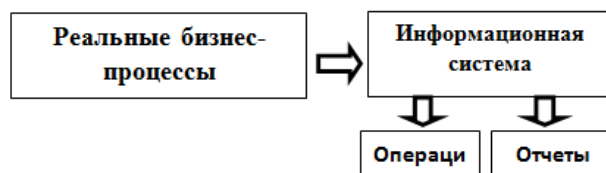


Рисунок 1 – Схема учетного моделирования

Бухгалтерский учет заключается в сплошном и непрерывном отражении хозяйственных операций, что справедливо и для автоматизированной формы ведения учета. Од-

ной из главных целей информационной системы бухгалтерского учета является генерирование отчетов по проведенным операциям. Построенная модель автоматизированной формы ведения бухгалтерского учета должна удовлетворять главной цели информационной системы бухгалтерского учета.

Построение автоматизированной формы учета осуществляется на тех же методических принципах, что и ручной учет, то есть в соответствии с нормативными актами, регламентирующими порядок ведения учета, а также с соблюдением общих методологических принципов бухгалтерского учета.

Так, взаимосвязь регистров и стадий учетного процесса обеспечивается реализацией единой схемы формирования исходных и результатных показателей посредством автоматизации этапов информационного процесса бухгалтерского учета. В свою очередь автоматическое формирование регистров обеспечивается интеграцией данных первичного учета с использованием технического, программного и математического обеспечения, а расширение аналитических и контрольных функций реализуется на основе модели системы бухгалтерских счетов, отражающей порядок построения и интерпретации всех синтетических и аналитических счетов. В частности, систематизация данных в разрезе бухгалтерских счетов, а также переход от аналитического уровня обобщения учетных данных к синтетическому производятся автоматически.

Автоматизированная форма бухгалтерского учета отражает системный подход к описанию учетного процесса в условиях автоматизации в зависимости от выбранных вариантов моделей учета, технических средств и программного обеспечения. На основе выбранных вариантов осуществляются процедуры получения совокупности учетных записей, которые служат исходной базой для составления аналитических и синтетических регистров, а также формирования бухгалтерского баланса и отчетности.

Следует отметить, что методологические правила и технологические аспекты, отражающие обработку информации, остаются без изменений в условиях применения любой техники, которая делает более эффективной технологию бухгалтерского учета. Для обеспечения практического использования представленной модели необходима дальнейшая ее конкретизация в направлении моделирования информационных процессов и алгоритмизации обработки данных на всех участках учета.

Сущность большинства автоматизированных форм учета заключается в последовательной реализации принципа переноса данных от ввода данных и формирования проводок до выдачи Главной книги и баланса. Отличаясь в деталях, они подчиняются общим основным правилам:

- одноразовый и минимальный ввод – многократный и максимальный вывод;
- один журнал хронологической записи – множество регистров систематической записи;
- полноценный учет по синтетическим счетам, субсчетам и аналитическим кодам;
- отчетная информация в срок – рабочая по запросу;
- автоматическое ведение журнала хозяйственных операций;
- наличие типовых проводок;
- учет любых финансово-хозяйственных операций, включая валютные, с автоматическим пересчетом курсовой разницы;
- автоматический подсчет развернутого и свернутого сальдо, оборотов, составление журналов-ордеров, Главной книги, баланса и других произвольных отчетных форм;
- создание, печать и хранение электронных копий первичных документов;
- компактная и удобная для обзора форма представления результатной информации;
- оперативный доступ к информации, а также система формирования архивов данных с возможностью доступа к ним;
- обеспечение целостности базы данных.

В условиях автоматизации значительное совершенствование техники учета характеризуется расширением аналитических и контрольных функций на основе методологического единства данных первичного учета и основных учетных регистров. Определенный

набор учетных функций, заложенный в алгоритмы программы, позволяет автоматизировать элементы метода бухгалтерского учета – документацию, ведение счетов, двойную запись, оценку, калькуляцию и многое другое.

Специфические особенности, связанные с технологией регистрации, накопления, обработки учетных данных и формированием отчетности, обеспечивают следующие преимущества автоматизированной формы бухгалтерского учета:

- настраиваемость системы на учетную политику различных предприятий и на потребности конкретного пользователя, включая настройку формы баланса, создание и редактирование отчетных форм (шаблонов);
- неограниченную аналитичность учета, а именно: возможность получения аналитической информации в любом разрезе, с необходимой степенью обобщения, за любой период времени, в течение которого накапливаются учетные данные. Зависит от модели организации аналитического учета, использованной при выборе конкретной компьютерной системы;
- повышение достоверности учетных данных посредством автоматизации арифметических и логических операций обработки информации на основе разнообразных встроенных алгоритмов;
- возможность автоматизации сбора первичных учетных данных с применением сканирующих устройств;
- организацию управленческого учета на предприятии на взаимосвязи оперативного и бухгалтерского учета;
- возможность формирования необходимых отчетных форм для проведения последующего финансового анализа предприятия по данным бухгалтерского учета;
- возможность организации параллельного ведения учета и составления отчетности в нескольких стандартах (US GAAP, IFRS), а именно: возможность получать несколько систем оценок и показателей, рассчитываемых по разным методикам на основании одних и тех же однократно вводимых данных [2].

Следует отметить, что современные системы автоматизированной обработки учетной информации продолжают развиваться на принципах рационализации форм учета, системности, целостности, адаптации к внешней среде, оптимальной организации базы данных, автоматизации документооборота и полноценной автоматизации учетных функций. Соблюдение данных принципов позволяет оптимизировать технологию обработки учетной информации.

Список цитированных источников

1. Медведев, М.Ю. Экаунтология: компьютерный учет вместо бухгалтерского / М.Ю. Медведев. – М.: ДМК Пресс, 2012.
2. Сафина, З.З. Бухгалтерский учет в условиях автоматизации и перехода на МСФО / З.З. Сафина. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.fekon.ru/content/view/365/23/> – Дата доступа: 12.05.2015.

УДК 519.725;007.001.362;528.85/.87(15)

ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К СЖАТИЮ ГИПЕРСПЕКТРАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Перцев Д.Ю.

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск
Научный руководитель: Дудкин А.А., д.т.н., доцент*

Рассмотрены современные подходы к интеллектуальной обработке данных дистанционного зондирования для ее сжатия при передаче на Землю. Проведен анализ достоинств и недостатков указанных методов.

Введение

В настоящее время при дистанционном зондировании Земли широко применяется гиперспектральная съемка. Гиперспектральные данные фиксируются в виде непрерывно-

го диапазона спектра с определенным шагом и представляют собой трехмерный куб, включающий пространственное, спектральное и радиометрическое разрешение.

Пример гиперспектральных данных AVIRIS [1], считающийся стандартом для проведения исследований, обладает следующими техническими характеристиками:

- пространственное разрешение – 512x677 пикселей (1 пиксель охватывает площадь 20x20 м);
- спектральное разрешение – 224 полосы (от 400 до 2500 нм);
- радиометрическое разрешение – 12 бит.

Отсюда следует, что размер одного куба около 110 Мб, что является достаточно большим объемом для передачи в условиях съемки из космоса.

Анализ отечественной и зарубежной литературы [2–6] позволяет выделить следующие основные подходы к сжатию гиперспектральных данных:

- 1) с адаптацией системы под заданные условия;
- 2) с применением общеизвестных методик сжатия.

Первый подход основан на существенной избыточности получаемых данных, связанный с большим спектральным разрешением. В случае если возможно заранее определить область применения спектрометра, из формируемого гиперкуба удаляются спектральные полосы, не представляющие интерес. К сформированному в результате кубу применяются алгоритмы из первого подхода. Главным достоинством метода является передача только необходимых данных.

В рамках второго подхода чаще всего используются алгоритмы сжатия без потерь и алгоритмы сжатия с потерями. При этом вводится ограничение, что искажение в сигнале не должно превышать уровень шума, создаваемого спектрометром. Попытка классификации алгоритмов, относящихся к данному подходу, позволила выделить три основных класса, которые анализируются ниже.

Алгоритмы сжатия на основе предсказателя

Алгоритмы данного класса предсказывают текущее значение пикселя по некоторой окрестности. После этого формируется ошибка предсказания, которая в дальнейшем передается на схему кодирования.

Анализ позволил выделить следующие подклассы:

- линейные адаптивные;
- контекстно-адаптивные;
- серия алгоритмов CALIC.

В случае если линейно-адаптивный предсказатель работает с окрестностью, охватывающей соседние спектральные полосы, возможен поиск оптимальных спектральных каналов и их перестановка для достижения лучшего качества предсказания (например, алгоритм с поиском оптимальных мультисканалов для предсказания). Основным недостатком в данном подходе является существенная вычислительная сложность, связанная с поиском оптимальной спектральной полосы. Данный недостаток приводит к сложности реализации алгоритма в условиях космического аппарата.

Класс контекстно-адаптивных предсказателей является вычислительно более сложным. Задачей алгоритма является минимизировать среднеквадратичную ошибку предсказания для получения оптимального распределения для последующего кодирования.

Алгоритмы сжатия на основе поиска по таблице

Основным недостатком многих алгоритмов предсказания является вычислительная сложность. Задачей алгоритма на основе поиска по таблице является ускорить процесс вычисления за счет того, что корреляция между спектральными плоскостями существ-

венна. Для этих целей вводится специальная 3-мерная таблица, по которой осуществляется предсказание, – 2-мерная плоскость соответствует пространственному разрешению и дополнительная третья плоскость размерностью, равной максимальному значению пикселя. Например, для радиометрического разрешения в 12 бит размер таблицы по третьей координате будет составлять 4096 элементов, каждый из которых занимает 12 бит. При обработке первой спектральной плоскости значения таблицы обновляются текущими значениями пикселей. Для каждой последующей плоскости при предсказании текущего значения система считывает соответствующее значение элемента из таблицы и осуществляет поиск в заданной области в текущем спектральном канале значения максимально близкого к считанному. Полученное значение будет считаться как предсказанное. Дальнейшая обработка эквивалентна, показанной на рис. 3.

Основным недостатком такого подхода являются высокие требования к объему памяти и ее пропускной способности. Различные варианты описанного алгоритма (LAIS-LUT, LAIS-QLUT), кроме улучшения качества предсказания, предлагают подходы к уменьшению требуемого объема памяти.

Алгоритмы сжатия на основе дискретного вейвлет-преобразования

Алгоритмы на основе дискретного вейвлет-преобразования предполагают предварительный перевод спектральной плоскости в частотную область. После этого возможно организовать обработку таким образом, чтобы система кодировала в первую очередь наиболее значимые (высокочастотные) вейвлет-коэффициенты, постепенно смещаясь в область с наименее значимыми коэффициентами. Такой подход позволяет реализовать как сжатие без потерь (при обработке всех вейвлет-коэффициентов), так и управляемое сжатие с потерями. Главный недостаток подхода – вычислительная сложность, связанная с преобразованием в частотную область куба данных и последующий переход в памяти от высокочастотных к низкочастотным вейвлет-коэффициентам.

Заключение

В зависимости от имеющейся аппаратной платформы, на которой выполняется обработка, эффективными становятся разные методы:

- в условиях космического аппарата эффективными оказываются простые алгоритмы, основанные на линейном предсказании, при достаточном объеме оперативной памяти – алгоритмы поиска по таблице, при заведомо известных условиях съемки – игнорирование определенных спектральных полос;
- в условиях наземной обработки возможно применение вычислительно сложных алгоритмов с поиском оптимальной последовательности спектральных полос и их перестановкой, анализом содержимого выбранной полосы и принятием решения о ее удалении.

Список цитированных источников

1. Airborne Visible/Infrared Imaging Spectrometer [Электронный ресурс]. – 1998. – Официальный портал AVIRIS. – Режим доступа: <http://aviris.jpl.nasa.gov/>. – Дата доступа: 27.07.2015.
2. Compression of hyperspectral imagery via linear prediction / F. Rizzo [et al.] // In Proc. of the 3th International Joint Conference on E-Business and Telecommunications (ICETE'06). – 2006. – Vol. 13. – P. 284–291.
3. Lossless compression of hyperspectral imagery / R. Pizzolante // In Proc. of the First International Conference on Data Compression, Communications and Processing (CCP'11). – 2011. – P. 157–162.
4. Pizzolante, R. Visualization, band ordering and compression of hyperspectral images / R. Pizzolante, B. Carpentieri // Algorithm. – 2012. – Vol. 5. – P. 76–97.
5. Optimized onboard lossless and near-lossless compression of hyperspectral data using CALIC / E. Magli [et al.] // Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE. – 2004. – Volume 1, Issue 1. – P. 21–25.
6. Mielikainen, J. Lossless compression of hyperspectral images using lookup tables / J. Mielikainen // Signal Processing Letters, IEEE. – 2006. – Vol. 13. – Issue 3. – P. 157–160.

УДК 681.327

СТРУКТУРА МОБИЛЬНОГО ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ЭКСПРЕСС-АНАЛИЗА СОСТОЯНИЯ РАСТИТЕЛЬНОСТИ ПО ИЗОБРАЖЕНИЯМ

Романовский К.В.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Научно-производственное общество с ограниченной ответственностью

«Висма-Планар», г. Минск

Научный руководитель: Дудкин А.А., д.т.н., доцент

Предложена структура мобильного приложения для экспресс-анализа состояния сельскохозяйственной растительности. Использование мобильной платформы позволило ускорить принятие решений при мониторинге состояния растительности данных за счет более ранней обработки, проводимой уже на этапе получения информации, а также за счет сокращения объема данных, посылаемых для обработки на сервер.

Введение

При принятии решений в процессе мониторинга сельскохозяйственных полей основным является распознавание пораженных заболеваниями участков. Для ее решения используются геоинформационные программно-аппаратные комплексы (АПК), в которых совмещаются необходимые методы для обработки изображений [1, 2]. Такие АПК, как правило, состоят из двух основных частей – мобильного приложения и сервера. Серверная часть отвечает за выбор способа построения информационных признаков на основе данных дистанционного зондирования Земли, выделение площадных объектов, их распознавание и формирование управляющего решения. Мобильное приложение (мобильная подсистема) – это программные средства, предоставляющие возможность отображать информацию о состоянии сельскохозяйственной растительности на карте, которая является набором упорядоченных по географическим координатам цифровых фотографий.

В реальном масштабе времени принимаются данные:

- от глобальной навигационной спутниковой системы, которая определяет, на каком участке поля она находится, и записывает координаты в файл с фотографией согласно стандарту EXIF, позволяющему добавлять к изображению метаданные, например, сохранить полученные с приемника GPS-координаты места съемки;
- цветной камеры видимого диапазона.

Система в реальном времени позволяет корректировать данные карты особых областей, что увеличивает эффективность решения задачи мониторинга.

Скорость обработки данных обуславливается нахождением мобильной платформы непосредственно у изучаемого участка – цифровые фотографии попадают в систему сразу после окончания процесса съемки, без их длительной транспортировки на сервер. В процессе обработки эксперт формирует выборки необходимых для дальнейшей обработки фотографий, уменьшая количество поступающих на вход сервера данных.

Основные модули системы

Разработанное мобильное приложение включает пять основных модулей (рис. 1): приемки и передачи информации, обработки изображений, построения карты, хранения данных, управления БПЛА.

С точки зрения вычислительной сложности и необходимости лишь экспресс-анализа на мобильном компьютере предпочтительнее будет использовать алгоритм точечного типа с использованием цветовой модели RGB (Red, Green, Blue – красный, зеленый, синий). Использование алгоритмов глобального типа также может ограничиваться большим размером исходного снимка при ограниченных ресурсах компьютера [3].



Рисунок 1 – Структурная схема мобильного приложения

Алгоритм экспресс-анализа

Алгоритм обработки состоит в следующем.

1. БПЛА согласно заданным параметрам совершает облет поля и предоставляет фотографии на вход системы. Происходит формирование выборок, если это необходимо.
2. На выбранной пользователем фотографии задаются основные параметры – выбирается пять эталонных цветов, их диапазон и пороговое процентное содержание на фотографии.
3. Производится обработка всех фотографий. Подсчитывается количество пикселей для каждого эталона, выполняется проверка, не превышает ли это количество заданный диапазон. Всякое превышение регистрируется и показывается пользователю на информативной карте.
4. Производится обработка GPS-координат фотографии. Данные берутся из информации, закрепленной за каждой цифровой фотографией согласно стандарту EXIF. Упорядочивая снимки по долготе и широте, формируется информативная карта (на ней указаны проблемные участки сельскохозяйственного поля).

При необходимости, можно приступить к новому анализу с другими параметрами, сделать более глубокий анализ проблемных фотографий или сделать запрос на повторное фотографирование участка.

Заключение

Разработаны структура и алгоритм работы мобильного приложения системы распознавания сельскохозяйственной растительности, что позволило решить задачу экспресс-анализа сельскохозяйственной растительности без задействования мощностей стационарного сервера и производить экспресс-анализ растительности непосредственно возле исследуемого участка, существенно ускоряя работу эксперта. Цифровые фотографии попадают в систему сразу после окончания процесса съемки, без их длительной транспортировки на сервер. В процессе обработки эксперт формирует выборки необходимых для дальнейшей обработки фотографий, что, в свою очередь, уменьшает количество данных, поступающих на сервер.

Список цитированных источников

1. Development of the hardware and software complex for fertilizer application on agricultural fields / V. Ganchenko [et al] // Journal of Research and Applications in Agricultural Engineering. – 2014. – Vol. 59(1). – P. 34–39.
2. Richards, J.A. Remote Sensing Digital Image Analysis: An Introduction / J. Xiuping – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. – 431 p.
3. Foley, J.D. Computer Graphics: Principles and Practice / J.D. Foley. – Addison-Wesley Publishing Company, 1996. – 1175 p.

УДК 656:[681.5:004]

АСПЕКТЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ СИСТЕМЫ ПРИОРИТЕТНОГО ДВИЖЕНИЯ ЧЕРЕЗ ПЕРЕКРЕСТКИ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ ОПЕРАТИВНОГО НАЗНАЧЕНИЯ

Согоян А.Л.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

ДТП с участием транспортных средств (ТС) оперативного назначения несут значительные последствия: гибель людей; потери здоровья сотрудников служб; необходимость их лечения и реабилитации; значительная задержка времени реагирования на экстренный вызов (ТС не приедет на вызов, вместо него необходимо отправить другое ТС); затраты на восстановление (если это возможно) или покупку нового специализированного автотранспортного средства [1].

Один из подходов для обеспечения безопасного передвижения ТС оперативного назначения, движущихся с включенными проблесковыми маячками является использование геонавигационной системы совместно с системой управления светофорами [2].

Функционирование системы основано на том, что каждое ТС экстренного назначения оснащено GPS/GSM терминалом. При включении проблесковых маячков водителем автоматически активируется передача данных GPS по протоколу навигационного оборудования NMEA о расположении ТС по GPRS каналу на сервер управления светофорными объектами.

Для обеспечения безопасной передачи данных на сервер управления светофорами каждый GPS/GSM терминал должен поддерживать шифрование передаваемых данных, например, по алгоритму AES-128.

Криптографический алгоритм AES-128 обеспечивает безопасную передачу данных между GPS/GSM терминалом и сервером управления светофорными объектами.

Если в качестве GPS/GSM терминала используется мобильное устройство, такое как планшет или смартфон, то возможности шифрования увеличиваются, благодаря использованию криптографических программных пакетов и библиотек. Появляется возможность реализовать аутентификацию транспортного средства оперативного назначения на сервере управления светофорными объектами.

Для защиты от повторной отправки перехваченных злоумышленником данных производится сравнение времени на сервере со временем в зашифрованных данных с GPS/GSM терминала ТС оперативного назначения. В случае значительного расхождения, данные не принимаются, а информация об отправителе и полученные данные добавляются в журнал событий, после чего происходит уведомление администратора о попытке повторной отправки данных злоумышленником.

Для надежного безопасного взаимодействия GSM устройство терминала обеспечивается статическим IP адресом. При добавлении транспортного средства в список ТС оперативного назначения, поддерживаемых системой управления светофорами, администратор указывает уникальный идентификационный номер устройства и статический IP адрес. Данные с IP адресов, не включенных в список транспортных средств, игнорируются, но записываются в журнал событий с последующим уведомлением администратора.

Сервер получает зашифрованные данные с GPS терминала ТС оперативного назначения, расшифровывает их. В качестве переданных данных выступают: уникальный идентификатор, географические координаты расположения ТС, направление движения, скорость движения. Опираясь на расположение и направление движения ТС оперативного назначения, сервер производит вычисления светофорных объектов располагаемых по ходу движения оперативного транспорта. На вычисленные светофорные объекты впереди движения ТС подается запрещающий сигнал для всех полос и всех направлений движения. Вся информация о полученных данных и действиях в системе вносится в журнал событий.

Серверная часть системы должна представлять собой два физических сервера: 1) сервер, который непосредственно централизованно управляет светофорными объектами в городе; 2) сервер, обеспечивающий взаимодействие с GPS/GSM устройствами транспортных средств оперативного назначения.

Сервер 1 и сервер 2 физически соединяются между собой. Сервер 1 не имеет доступа к сети интернет, локальным сетям, за исключением сети светофорных объектов. Кроме порта для соединения с сервером 2, все порты на сервере 1 отключены файрволом, в том числе отключена служба ICMP. На сервере 2 также отключены все порты, кроме порта для взаимодействия с терминалами ТС и порта обмена данными с сервером 1.

Внедрение системы приоритетного проезда перекрестков для ТС служб оперативного назначения требует внимательного отношения к компьютерной безопасности. Взаимодействие элементов системы должно происходить по защищенным каналам связи с использованием шифрования и аутентификации. Стабильная, надежная работа серверной части может быть обеспечена при грамотной настройке политик безопасности каждого из серверов.

Работа выполнена при поддержке Европейского гранта «Grant Agreement Number 2013-4550/001-001» по проекту Ve-Safe – Белорусская сеть безопасных дорог 544181-TEMPUS-1-2013-1-IT-TEMPUS-JPCR.

Список цитированных источников

1. U.S. DOT (2003). Fatality Analysis Reporting System (FARS) Web-Based Encyclopedia Queries for Emergency Use Crash Statistics.
2. Согоян, А.Л. Система приоритетного движения на перекрестках «Зеленая волна» для транспортных средств оперативного назначения: сб. материалов V Международной научно-технической конференции OSTIS-2015 / А.Л. Согоян, В.Н. Шуть. – Минск: БГУИР, 2015. – С. 309–314.

УДК 004.04

РЕАЛИЗАЦИЯ ОТКАЗОУСТОЙЧИВОСТИ ВЫСОКОНАГРУЖЕННЫХ СИСТЕМ

Шахно М.И.

*Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, г. Брест
Научный руководитель: Козинский А.А., к.пед.н., доцент*

При разработке высоконагруженных веб-систем возникает множество технических проблем. Одной из таких проблем является организация отказоустойчивости системы. Отказоустойчивость решается на различных уровнях. Практическими приемами организации отказоустойчивости является организация кластера серверов (веб-серверов, контейнеров сервлетов), а также репликация (в памяти, базе данных).

Рассмотрим один из приемов организации отказоустойчивости веб-серверов, который предполагает организацию на уровне архитектуры.

При отправке HTTP-запроса (см. [1], [2]) к сервису, его принимает и обрабатывает веб-сервер. Сервер может являться узлом кеширования (не всегда), а так же узлом, где хранится статический контент приложения. HTTP-запрос на выполнение каких-либо логических действий (обработка запросов к базе данных; обработка вычислений и др.) попадает в узел, где происходит балансировка нагрузки.

Узел балансировки нагрузки передает этот запрос на выполнение одному из подузлов. В нашем случае одному из контейнеров сервлетов. Контейнер сервлетов, выполнив требуемую логическую часть, передает результат запросившему сервису. Пример организации описанного подхода представлен на рис. 1.

Представленная архитектура значительно усложняется при наличии сложного масштабируемого вычислительного кластера. Такой кластер служит для обеспечения вычисления сложноструктурированных данных.

Репликация – это прием синхронизации различного рода данных. Например, данных активной сессии между узлами.

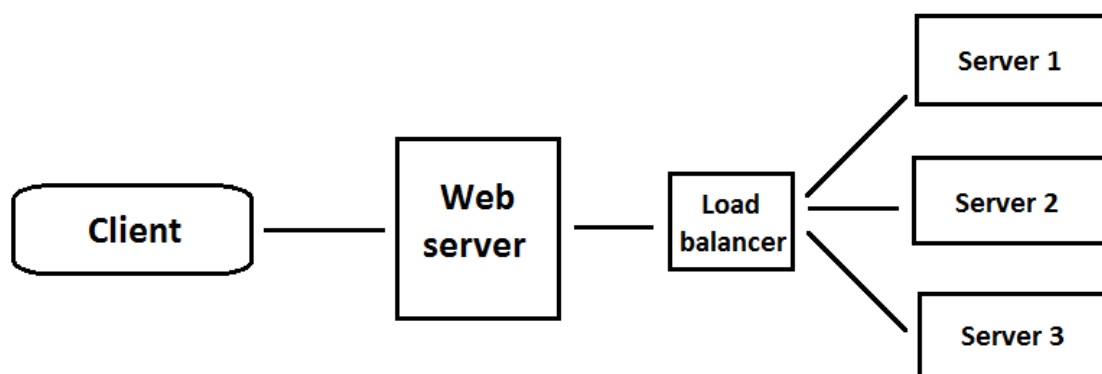


Рисунок 1 – Архитектура отказоустойчивости на уровне серверов

Репликация конфигурируется на подузловых компонентах. В нашем случае такими компонентами являются контейнеры сервлетов.

Данные хранятся в памяти либо выгружаются в базу данных и т.п.

Другим случаем репликации является ее поддержка на уровне баз данных. В случае нескольких баз данных может быть использован подход Master-Slave [3]. В этом случае имеем одну основную базу данных – Master. Изменения в Master фиксируются в бинарном логе, которые затем реплицируются на узел Slave. Такой подход позволяет в случае отказа Master переключиться на Slave. Пример работы представлен на рисунке 2, ниже.

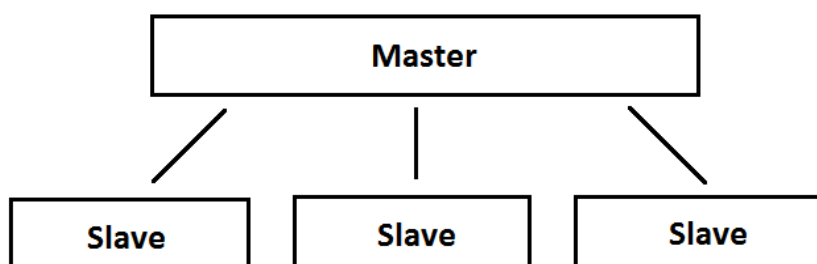


Рисунок 2 – Master-Slave

В ходе доклада будут представлены результаты применения описанных приемов для реализации отказоустойчивости высоконагруженных систем.

Список цитированных источников

1. RFC 2616 [Электронный ресурс] / HTTP/1.1. – Режим доступа: <https://tools.ietf.org/html/rfc2616>. – Дата доступа: 16.10.2015.
2. Простым языком об HTTP [Электронный ресурс] / Простым языком об HTTP. – Режим доступа: <http://habrahabr.ru/post/215117/>. – Дата доступа: 16.10.2015.
3. "What is database replication? – Definition from WhatIs.com" [Electronic resource] / "What is database replication? – Definition from WhatIs.com". – Mode access: <http://searchsqlserver.techtarget.com/definition/database-replication>. – Data access: 15.10.2015.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

UDK 517.977

DIRECTIONAL DERIVATIVES OF VALUE FUNCTIONS IN PARAMETRIC NONLINEAR PROGRAMMING

Alexey Leschov, Leonid Minchenko
BSUIR, Minsk

We study the problem of existence and calculation of directional derivatives of value functions in the nonlinear mathematical programming problems which depend on parameters. This is one of the important problems in the theory of mathematical programming with perturbations of parameters [1,2]. We obtain sufficient conditions for existence and explicit formulas for calculating the directional derivatives of the first and second orders, under weaker hypotheses than those traditionally assumed.

We consider a mathematical programming problem $NLP(x)$ depending on a parameter $x \in R^n$:

$$f(x, y) \text{ @ } \inf_y,$$

$$y \in F(x) = \{y \in R^m \mid h_i(x, y) \leq 0, \quad i \in I, \quad h_i(x, y) = 0, \quad i \in I_0\},$$

where $I = \{1, \dots, s\}$, $I_0 = \{s+1, \dots, p\}$, and all functions $f(x, y)$, $h_i(x, y)$ $i = 1, \dots, p$ are assumed to be twice continuously differentiable.

For the multivalued mapping F defined above by the constraints of $NLP(x)$, we use the notation

$$\text{dom}F = \{x \in R^n \mid F(x) \neq \emptyset\}, \quad \text{gr}F = \{(x, y) \mid y \in F(x), \quad x \in R^n\}.$$

Consider the value function

$$j(x) = \inf \{f(x, y) \mid y \in F(x)\}$$

and the solution set of the problem $NLP(x)$

$$W(x) = \{y \in F(x) \mid f(x, y) = j(x)\}, \quad x \in R^n.$$

Fix a value $x^0 \in \text{dom}F$ of the parameter for the rest of the paper. We assume that the set $W(x^0 + t\bar{x})$ is nonempty and uniformly bounded for all sufficiently small numbers $t \geq 0$, that is there exist a number $t_0 > 0$ and a bounded set $Y_0 \subset R^m$ such that $W(x^0 + t\bar{x}) \subset Y_0$ for all $t \in [0, t_0]$.

In the sequel, for arbitrary chosen $x \in \text{dom}F$, $y \in F(x)$, $y^0 \in F(x^0)$ and $(\bar{x}, \bar{y}) \in R^n \times R^m$, we denote the pairs (x, y) , (x^0, y^0) and (\bar{x}, \bar{y}) by symbols z , z^0 and \bar{z} , respectively.

Consider the Lagrange function

$$L(z, l) = f(z) + \sum_{i \in I} \lambda_i h_i(z), \quad \text{where } l = (\lambda_1, \dots, \lambda_p), \quad h = (h_1, \dots, h_p).$$

Following [2, 3] introduce the lower Dini derivatives of the multivalued mapping F at the point z^0 in the direction \bar{x} :

$$DF(z^0; \bar{x}) = \{y \in R^m \mid y^0 + t\bar{y} + o(t) \in F(x^0 + t\bar{x}), \quad t > 0\}$$

$$D^2F(z^0, \bar{z}; \bar{x}) = \{\bar{n} \in R^m \mid y^0 + t\bar{y} + t^2\bar{n} + o(t^2) \in F(x^0 + t\bar{x}), \quad t > 0\}$$

and the sets

$$G(z^0; \bar{x}) = \{\bar{y} \in R^m \mid \tilde{a} \tilde{N}_i h_i(z^0), \bar{z} \tilde{n} \in 0, i \in I(z^0), \tilde{a} \tilde{N}_i h_i(z^0), \bar{z} \tilde{n} = 0, i \in I_0, \bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})\}$$

$$G^2(z^0, \bar{z}; \bar{x}) = \{\bar{v} \in R^m \mid \tilde{a} \tilde{N}_y h_i(z^0), \bar{v} \tilde{n} + \frac{1}{2} \tilde{a} \tilde{z}, \tilde{N}^2 h_i(z^0) \bar{z} \tilde{n} \in 0, i \in I^2(z^0, \bar{z}),$$

$$\tilde{a} \tilde{N}_y h_i(z^0), \bar{v} \tilde{n} + \frac{1}{2} \tilde{a} \tilde{z}, \tilde{N}^2 h_i(z^0) \bar{z} \tilde{n} = 0, i \in I_0\},$$

where

$$I^2(z^0, \bar{z}) = \{i \in I(z^0) \mid \tilde{a} \tilde{N}_i h_i(z^0), \bar{z} \tilde{n} = 0\}, I(z^0) = \{i \in I \mid h_i(z^0) = 0\},$$

$$I^a(z^0, \bar{z}) = \{i \in I^2(z^0, \bar{z}) \mid \tilde{a} \tilde{N}_y h_i(z^0), \bar{v} \tilde{n} + \frac{1}{2} \tilde{a} \tilde{z}, \tilde{N}^2 h_i(z^0) \bar{z} \tilde{n} = 0, \forall \bar{v} \in G^2(z^0, \bar{z}; \bar{x})\}$$

The main idea of our paper is to propose a new regularity-like condition (see the definition below) which allows to extend significantly the known results [1] about differential properties of value functions.

Definition 1. We say that the relaxed Mangasarian-Fromovitz condition in the direction \bar{x} (briefly $RMF_{\bar{x}}$) holds at the point $z^0 = (x^0, y^0) \in grF$ iff $G(z^0; \bar{x}) \neq \emptyset$ and the system of (R^{m+1}) -vectors

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} \tilde{N}_y h_i(z) \\ \tilde{a} \tilde{N}_x h_i(z), \bar{x} \tilde{n} \end{pmatrix} \begin{matrix} \ddot{0} \\ \ddot{0} \end{matrix} \quad i \in I_0 \in I^a(z^0, \bar{x})$$

has constant rank near z^0 .

The next theorem gives us sufficient conditions for the directional differentiability of multivalued mappings.

Theorem 1. Let $RMF_{\bar{x}}$ hold at the point z^0 . Then $DF(z^0; \bar{x}) \neq \emptyset$

Definition 2. Let $\bar{y} \in G(z^0; \bar{x})$. We say that the relaxed second order Mangasarian-Fromovitz condition at the point z^0 along the vector $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ in the direction \bar{x} (briefly, $RMF_{\bar{x}}^2(\bar{z})$) holds iff $G^2(z^0, \bar{z}; \bar{x}) \neq \emptyset$ and the system

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} \tilde{N}_y h_i(z) \\ \tilde{a} \tilde{N}_x h_i(z), \bar{x} \tilde{n} \end{pmatrix} \begin{matrix} \ddot{0} \\ \ddot{0} \end{matrix} \quad i \in I_0 \in I^a(z^0, \bar{z})$$

has constant rank for all Z in some neighbourhood of the point z^0 .

Theorem 2. Let $\bar{y} \in G(z^0; \bar{x})$. If the condition $RMF_{\bar{x}}^2(\bar{z})$ holds at the point $z^0 = (x^0, y^0)$ along the vector $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ then $D^2F(z^0, \bar{z}; \bar{x}) \neq \emptyset$.

Denote $F(z^0, \bar{z}, \bar{v}) = \tilde{a} \tilde{N}_y f(z^0), \bar{v} \tilde{n} + \frac{1}{2} \tilde{a} \tilde{z}, \tilde{N}^2 f(z^0) \bar{z} \tilde{n}$.

Theorem 3. Let $RMF_{\bar{x}}$ and strong second order sufficient condition in the direction \bar{x} ($SSOSC_{\bar{x}}$) hold at all points $z^0 = (x^0, y^0)$, where $y^0 \in w(x^0)$. Then

1) the function j is differentiable at the point x^0 in the direction \bar{x} and

$$j'(x^0; \bar{x}) = \min_{y^0 \in w(x^0)} \min_{\bar{y} \in G(z^0; \bar{x})} \tilde{a} \tilde{N} f(z^0), \bar{z} \tilde{n} = \min_{y^0 \in w(x^0)} \max_{i \in L(z^0)} \tilde{a} \tilde{N}_x L(z^0, i), \bar{x} \tilde{n}$$

2) the following formula is valid

$$D^2_+ j(x^0; \bar{x}) = \inf_{y^0 \in w(x^0, \bar{x})} \inf_{\bar{y} \in G(z^0; \bar{x})} \inf_{\bar{v} \in G^2(z^0, \bar{z}; \bar{x})} 2F(z^0, \bar{z}, \bar{v}) =$$

$$= \inf_{y^0 \in w(x^0, \bar{x})} \inf_{\bar{y} \in G(z^0; \bar{x})} \sup_{i \in L^2(z^0, \bar{x})} \tilde{a}(\bar{x}, \bar{y}), \tilde{N}^2_{zz} L(z^0, i)(\bar{x}, \bar{y}) \tilde{n}$$

References

1. Bonnans, J.F. Perturbations analysis of optimization problems / J.F. Bonnans, A. Shapiro. – New York: Springer-Verlag, 2000.
2. Luderer, B. Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations / B. Luderer, L. Minchenko, T. Satsura. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. – 222 p.
3. Minchenko, L.I. Parametric nonlinear programming problems under relaxed constant rank regularity condition / L. Minchenko, S. Stakhovski // SIAM Journal on Optimization. – 2011. – Vol. 21. – N 1.

УДК 511.1

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА МЕРСЕННА**Аксамит М.В., Былинович В.Н.**

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск
Научный руководитель: Стройникова Е.Д.*

Основная теорема арифметики гласит, что всякое натуральное число $n > 1$ можно представить в виде произведения простых множителей:

$$n = p_1 * p_2 * \dots * p_m,$$

где p_1, p_2, \dots, p_m – простые числа.

Разложение натурального числа на составляющие его простые множители называется факторизацией числа. В настоящий момент неизвестен такой алгоритм факторизации, который мог бы разложить любое большое число на простые множители за полиномиальное время. Благодаря этому простые числа нашли широкое применение в криптографии. Например, RSA: для того, чтобы взломать данный шифр, нужно разложить большое число n , известное по открытому ключу, на простые множители, которых всего два. В том же алгоритме RSA для генерации ключей требуется найти большие простые числа, что на сегодняшний день гораздо проще факторизации.

Небольшие простые числа из начала списка простых можно получить с помощью таких несложных алгоритмов, как решето Эратосфена, Сундарама или Аткина. Но на практике, как правило, нужны числа более высоких порядков. Тут на помощь приходят тесты на простоту – алгоритмы, проверяющие, является ли число простым. Но само число сначала нужно сгенерировать.

Существует ряд чисел специального вида, простоту которых можно доказать эффективными алгоритмами и за полиномиальное время:

Числа Мерсенна – самые большие из известных простых чисел, очень распространены благодаря существованию эффективного теста на простоту Люка–Лемера, однако бесконечность таких чисел до сих пор не доказана. Их можно представить в виде

$$M_p = 2^p - 1,$$

где p – простое число. Замечание: простоты числа p недостаточно для доказательства простоты числа Мерсенна. Для этого существует специальный алгоритм: тест Люка – Лемера для чисел Мерсенна. Тест основывается на том, что простота числа M_p влечет за собой простоту числа p . Пусть p – простое число, большее либо равное трем. Зададим последовательность:

$$\begin{aligned} L_0 &= 4, \\ L_{n+1} &= L_n^2 + 2. \end{aligned}$$

Тогда M_p простое тогда и только тогда, когда $L_{p-2} \equiv 0 \pmod{M_p}$.

При реализации теста вычисляют не сами значения L_0, L_1, \dots, L_k , длина которых растет по экспоненте, а только их остатки от деления на M_p .

Вычислительная сложность теста равна $O(q^3)$, так как производится $O(q)$ возведений в квадрат и делений по модулю, в то время как самый простой алгоритм умножения имеет сложность $O(q^2)$.

25 января 2013 г. математик Кертис Купер (США) в рамках проекта распределенных вычислений GIMPS с помощью теста Люка–Лемера нашел 48-е простое число Мерсенна: $M_{48} = 2^{57885161} - 1$. Оно состоит из 17424170 десятичных цифр. Оно же на сегодняшний день является самым большим известным простым числом.

Авторами доклада была разработана учебная программа на языке С, находящая простые числа Мерсенна. Она генерирует числа Мерсенна и проверяет их на простоту, пока не находит простое. При реализации программы была использована длинная арифметика, т. к. нужные нам числа превышают разрядность регистров процессора: длинное число представляется в виде одномерного массива из его десятичных цифр. Для всех арифметических операций были написаны отдельные функции: вычисление сложения, вычитания и умножения «столбиком», а деления – «уголком». Также был использован рекурсивный алгоритм возведения в степень по модулю.

Вот некоторые примеры сгенерированных простых чисел: $2^{107} - 1 = 162259276829213363391578010288127$ (время выполнения: 21,801 сек.), $2^{607} - 1 = 531137992816767098689588206552468627329593117727031923199444138200403559860852242739162502265229285668889329486246501015346579337652707239409519978766587351943831270835393219031728127$ (время выполнения: 193,305 сек.).

Данная программа наглядно демонстрирует работу алгоритмов длинной арифметики и теста Люка–Лемера, т.к. используются все известные алгоритмы для арифметических операций и числа в привычном десятичном представлении. Существует способ немного ускорить программу: использовать числа в системе счисления по большему основанию, чем 10. Это позволит сократить длину массива, что уменьшит количество вычислений.

На рисунке 1 приведена гистограмма сравнения времени выполнения программы (в сек.) и степени, в которую мы возводим число 2 при генерации числа Мерсенна.

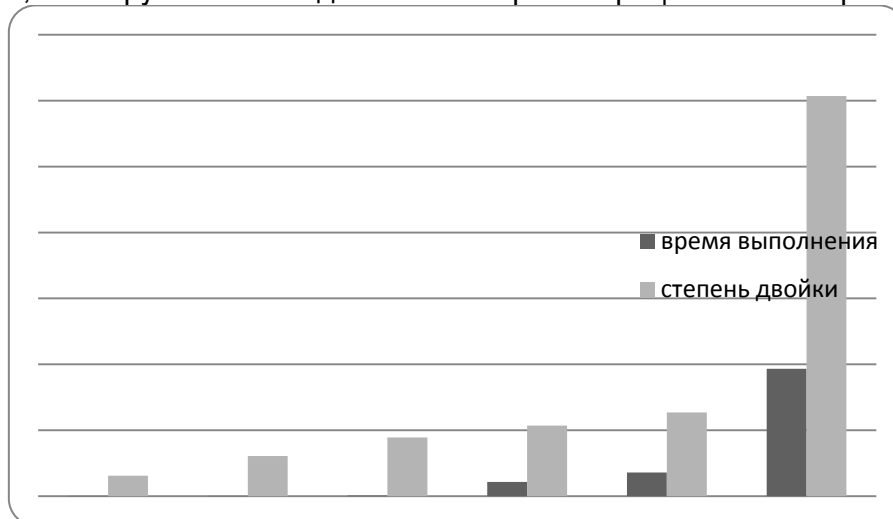


Рисунок 1

Из рисунка 1 мы видим, что время выполнения вычислений растет быстрее, чем искомая степень. Но для поиска чисел Мерсенна до шестисотой степени скорости выполнения хватает.

Список цитированных источников

1. Крэндалл, Р. Простые числа. Криптографические и вычислительные аспекты: научная и учебная литература / Р. Крэндалл, К. Померанс. – Москва, 2011. – 664 с.

УДК 512.542

О КОНЕЧНОЙ p -РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЕ СО СВЕРХРАЗРЕШИМОЙ p -ХОЛЛОВОЙ ПОДГРУППОЙ

Грицук Д.В.*Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, г.Брест*

Рассматриваются только конечные группы.

Каждая p -разрешимая группа G обладает субнормальным рядом

$$G = G_0 \hat{=} G_1 \hat{=} \dots \hat{=} G_{n-1} \hat{=} G_n = 1,$$

все факторы G_{i-1}/G_i которого являются либо $p\phi$ -группами, либо абелевыми (нильпотентными) p -группами. Наименьшее число абелевых (нильпотентных) p -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной (соответственно nilпотентной) p -длиной p -разрешимой группы G и обозначается через $l_p^a(G)$ (соответственно через $l_p^n(G)$). Ясно, что $l_p^n(G) \leq l_p^a(G)$ для любой p -разрешимой группы G . Некоторые оценки этих p -длин установлены в работах В.С. Монахова, О.А. Шпырко и др. В частности, если G – p -разрешимая группа, у которой коммутант p -холловой подгруппы nilпотентен, то $l_p^n(G) \leq 1 + \max_{r \hat{=} p} l_r(G)$, см. [1]. Получен аналог этого результата для производной p -длины p -разрешимой группы.

Теорема 1. Если G – p -разрешимая группа, у которой коммутант p -холловой подгруппы nilпотентен, то $l_p^a(G) \leq 1 + \max_{r \hat{=} p} l_r^a(G)$.

Поскольку коммутант сверхразрешимой группы nilпотентен, то из теоремы 1 вытекают следующие результаты

Следствие 1. Если G – p -разрешимая группа со сверхразрешимой p -холловой подгруппой, то $l_p^a(G) \leq 1 + \max_{r \hat{=} p} l_r^a(G)$.

Следствие 2. Если в p -разрешимой группе G силовские p -подгруппы циклические для всех $p \hat{=} p$, то $l_p^a(G) \leq 2$.

Следствие 3. Пусть G – p -разрешимая группа, силовские p -подгруппы которой бициклические для всех $p \hat{=} p$. Если $2 \hat{=} p$, то $l_p^a(G) \leq 3$.

Заметим, что из теоремы 1 вытекают некоторые результаты, полученные в работах [1] и [3].

Список цитированных источников

1. Монахов, В.С. О nilпотентной p -длине конечной p -разрешимой группы / В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13. – № 3. – С. 145–152.
2. Грицук, Д.В. О производной p -длине p -разрешимой группы / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Вестник БГУ. Серия 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
3. Грицук, Д.В. О конечных p -разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Проблемы математики, физики и техники. – 2013. – № 1(14). – С. 61–66.

УДК 512.542

РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ С СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ КОФАКТОРОВ ФИКСИРОВАННОГО НОРМАЛЬНОГО РАНГА

Даудов Д.Д.*Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, г.Брест
Научный руководитель: Трофимук А.А., к.физ.-мат.н., доцент*

Рассматриваются только конечные группы. Если H – подгруппа группы G , то $core_G H = \bigcap_{x \in G} H^x$ – ядро, а $H/core_G H$ – кофактор подгруппы H в группе G .

В.С. Монахов [1] ввел понятие нормального ранга p -группы P следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X < P} \log_p |X/F(X)|.$$

Здесь $F(X)$ – подгруппа Фраттини группы X , а запись $X < P$ означает, что X – нормальная подгруппа группы P .

Очевидно, что для нечетного простого числа p класс p -групп, у которых нормальный ранг ≤ 2 шире, чем класс всех бициклических p -групп. Так, экстраспециальная группа S порядка 27 имеет нормальный ранг, равный 2, но S не является бициклической. Кроме того, существуют бициклические 2-группы, которые имеют нормальный ранг 3. Так, группа

$$G = \langle a, b, c \mid a^2 = b^8 = c^2 = 1, [a, b] = c, [b, c] = b^4, [a, c] = 1 \rangle$$

является бициклической и $r_n(G) = 3$. При этом класс 2-групп, у которых нормальный ранг ≤ 3 шире, чем класс всех бициклических 2-групп.

В работе [2] получены оценки инвариантов разрешимой группы G с бициклическими силовскими подгруппами кофакторов ее подгрупп.

Доказана следующая

Теорема. Пусть G – разрешимая группа, у которой силовские p -подгруппы кофакторов ее подгрупп имеют нормальный ранг ≤ 2 для нечетного p и нормальный ранг ≤ 3 для $p=2$. Тогда производная длина фактор-группы $G/F(G)$ не превышает 6 и нильпотентная длина группы G не превышает 4.

Список цитированных источников

1. Монахов, В.С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В.С. Монахов // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2002. – Том 46. – № 2. – С. 25–28.
2. Елец, А.Ю. О разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами кофакторов их подгрупп / А.Ю. Елец // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XVIII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 23–25 марта 2015 г. / ГГУ им. Ф. Скорины; редкол.: О.М. Демиденко [и др.]. – Гомель, 2015. – С. 52.

УДК 519.6+517.983

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ В НЕЯВНОМ ПРОЦЕССЕ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ I РОДА

Дорогокупец П.И.

*Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, г.Брест
Научный руководитель: Матусик О.В., к.физ.-мат.н., доцент*

Для решения в гильбертовом пространстве операторного уравнения I рода

$$Ax = y_d \quad (1)$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A (0 не является его собственным значением, но $0 \in \text{Sp}A$, и, следовательно, рассматриваемая задача некорректна) используем итерационный процесс неявного типа

$$\left(E + a^2 A^2\right) x_{n+1,d} = (E - aA)^2 x_{n,d} + 2a y_d, \quad x_{0,d} = 0. \quad (2)$$

Здесь E — тождественный оператор, $\|y - y_d\| \leq d$.

Теорема. Итерационный процесс (2) при условии $a > 0$ сходится, если выбирать число итераций n в зависимости от уровня погрешности d так, чтобы $nd \rightarrow 0$ при

УДК 517.9

АССОЦИИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Жук А.И.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T = [0; a] \subset R$:

$$x^i(t) = \overset{g}{\underset{j=1}{\mathop{\text{a}}}} f^{ij}(t, x(t)) L^j(t), \quad i = \overline{1, p}, \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $f^{ij} \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, q}$ – липшицевы функции, $x(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^p(t)) \in R^p$, а $L^j(t), \quad j = \overline{1, q}$ – функции ограниченной вариации на отрезке T . Без ограничения общности будем считать, что функции $L^j(t), \quad j = \overline{1, q}$ непрерывны справа, $L^j(0) = L^j(0-) = 0$ и $L^j(a-) = L^j(a), \quad j = \overline{1, q}$.

Таким образом, правая часть рассматриваемой системы содержит произведение обобщенных функций, которое однозначно не определено в силу существующей проблемы умножения обобщенных функций, следовательно, рассматриваемая система является некорректной и решение системы уравнений (1) зависит от подхода к трактовке подобного рода систем. Наиболее перспективным из таких подходов является концепция новых обобщенных функций. Согласно этому подходу, заменяем обычные функции в системе дифференциальных уравнений (1) на соответствующие им новые обобщенные функции и получим запись уравнения в дифференциалах в алгебре новых обобщенных функций

$$d_{\mathbb{H}} x^i(\frac{\circ}{t}) = \overset{g}{\underset{j=1}{\mathop{\text{a}}}} f^{ij}(\frac{\circ}{t}, x(\frac{\circ}{t})) d_{\mathbb{H}} L^j(\frac{\circ}{t}), \quad i = \overline{1, p} \tag{3}$$

с начальным условием $x|_{[0, \mathbb{H}]} = x^0$, где обобщенные функции f^{ij}, L^j ассоциируют функции f^{ij} и L^j соответственно.

Заменим в (3) каждую новую обобщенную функцию представителем класса ее определяющего, получим запись задачи (3) на уровне представителей

$$x_n^i(t + h_n) - x_n^i(t) = \overset{g}{\underset{j=1}{\mathop{\text{a}}}} f_n^{ij}(t, x_n(t)) (L_n^j(t + h_n) - L_n^j(t)), \quad i = \overline{1, p} \tag{4}$$

с начальным условием $x_n(t)|_{[0, h_n]} = x_{n0}(t)$.

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T . Тогда t можно представить в виде $t = t_t + m_t h_n$, где $t_t \in [0, h_n), \quad m_t \in N$. Несложно видеть, что решение системы (4) можно записать в виде

$$x_n^i(t) = x_{n0}^i(t_t) + \overset{g}{\underset{j=1}{\mathop{\text{a}}}} \overset{m_t-1}{\underset{k=0}{\mathop{\text{a}}}} f_n^{ij}(t_t + kh_n, x_n(t_t + kh_n)) (L_n^j(t_t + (k+1)h_n) - L_n^j(t_t + kh_n)),$$

где $i = \overline{1, p}$.

Таким образом, под решением системы неавтономных дифференциальных уравнений (1) будем понимать ассоциированное решение задачи (3), существование и единственность решения которой доказано в работе [1].

В качестве представителей для уравнения (4) рассмотрим следующие функции:

$$L_n^j(t) = (L^j * r_n^j)(t) = \int_0^{1/g^j(n)} L^j(t+s)r_n^j(s)ds, \quad (5)$$

где $r_n^j(t) = g^j(n)r^j(g^j(n)t)$, $r^j \geq 0$, $\int_0^1 r^j(s)ds = 1$, а $f_n = f * \mathbb{1}_n$, $\mathbb{1}_n(x_0, x_1, \dots, x_p) = n^{p+1}\mathbb{1}(nx_0, nx_1, \dots, nx_p)$, $\int_{[0,1]^{p+1}} \mathbb{1} dx_0 dx_1 \dots dx_p = 1$. Здесь $g^j(n)$ - некоторая монотонная функция.

Будем говорить, что функция $x(t)$ является ассоциированным решением уравнения в дифференциалах (3), если существуют представители новых обобщенных функций $\mathbb{1}^j$, \mathbb{L}^j и x_0 , для которых $\mathbb{1}^j$ ассоциирует x в $D\mathcal{C}(T)$, т.е. решение задачи (5) $x_n(t)$ сходится в $D\mathcal{C}(T)$ к x и $\mathbb{1}^j = \mathbb{1}^j(x_n(t)) \in V(\mathbb{1}^j)$ (пространство новых обобщенных функций).

Будем говорить, что функция x является l-ассоциированным (S-ассоциированным) решением уравнения (3), если она является ассоциированным решением задачи (3) при условии, что $g^j(n)h_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и представители функций $\mathbb{1}^j$ и \mathbb{L}^j задаются формулой (5). В этом случае $d_{\mathbb{1}^j}^j$ будем называть l-ассоциированным (S-ассоциированным) коэффициентом.

Для описания предельного поведения решений задачи (4) в случае, когда одни обобщенные коэффициенты являются l-ассоциированными, а другие S-ассоциированными, рассмотрим систему интегральных уравнений, существование и единственность решений которой доказано в работе [2].

$$x^i(t) = x_0^i + \int_0^t \int_0^s \mathbb{1}^{ij}(s, x(s)) dL^{ic}(s) + \int_{m_j t}^t S^i(m_j, x(m_j-), DL(m_j)) \frac{\partial}{\partial t}, \quad i = \overline{1, p}, \quad (6)$$

где $L^{ic}(t)$ - непрерывная, а $L^{jd}(t)$ - разрывная составляющие функции $L^j(t)$, $j = \overline{1, q}$, m_j - точки разрыва функции $L(t)$, $DL(m_j) = L^d(m_j+) - L^d(m_j-)$ - величина скачка. $S^i(m_j, x, u) = j^i(1, m_j, x, u) - j^i(0, m_j, x, u)$, где $x \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^q$, $m_j \in T$, а $j^i(t, m_j, x, u)$ находится из уравнения

$$j^i(t, m_j, x, u) = x^i + \int_0^b u^j \int_0^t \mathbb{1}^{ij}(s, m_j(s, m_j, x, u)) dH(s-1) + \int_{j=b+1}^q u^j \int_0^t \mathbb{1}^{ij}(m_j(s, m_j, x, u)) ds \frac{\partial}{\partial t},$$

где $i = \overline{1, p}$, $H(t)$ - функция Хевисайда. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть f^{ij} , $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены, $L^j(t)$, $j = \overline{1, q}$ - непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $h_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ для $j = \overline{1, b}$, $g^j(n)h_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и для $j = \overline{b+1, q}$, $g^j(n)h_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ассоциированное решение задачи Коши (3) является решением системы уравнений (6), если $\int_T \mathbb{1}^j(x_{n_0}(t_t) - x_0) dt \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Рассмотрим случай, когда в качестве представителей $\mathbb{1}^{ij}$, \mathbb{L}^{ij} рассматриваются свертки функций f^{ij} , L^j , $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$ со стандартными шапочками, т.е. $g^j(n) = n$. Для описания l-ассоциированных решений системы (1) начальны условием (2) необходимо

исследовать предельное поведение решений задачи (4) при следующих условиях:
 $\frac{1}{n} = o(h_n)$ при $n \in \mathbb{N}$, $h_n \in \mathbb{R}_+$. Для этого рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t) = x_0^i + \overset{\circ}{a} \int_0^{t+} \overset{\circ}{\sigma}^{f^{ij}}(s, x(s-)) dL^j(s), \quad i = \overline{1, p}, \quad (8)$$

где $i = \overline{1, p}$ и интеграл $\overset{\circ}{\int} f(x) dL(x)$ понимается в смысле Лебега-Стилтьеса.

Теорема 2. Пусть f^{ij} , $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены. $L^j(t)$, $j = \overline{1, q}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда I -ассоциированное решение задачи Коши (3) является решением системы уравнений (8), если $\overset{\circ}{\int}_T |x_{n0}(t_t) - x_0| dt \in \mathbb{R}_+$.

Для описания S -ассоциированных решений рассматриваемой системы необходимо исследовать предельное поведение решений задачи (4) при следующих условиях:

$h_n = o(\frac{\overset{\circ}{a}}{\overset{\circ}{c}} \frac{\overset{\circ}{\sigma}}{\overset{\circ}{\rho}})$ при $n \in \mathbb{N}$, $h_n \in \mathbb{R}_+$. Для этого рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t) = x_0^i + \overset{\circ}{a} \int_0^t \overset{\circ}{\sigma}^{f^{ij}}(\xi s, x(s)) dL^{jc}(s) + \overset{\circ}{a} S^i(\eta, x(\eta-), DL(\eta)_{\frac{\circ}{\rho}}), \quad i = \overline{1, p}, \quad (9)$$

где $S^i(\eta, x, u) = j^i(1, \eta, x, u) - j^i(0, \eta, x, u)$, а $j^i(t, \eta, x, u)$ находится из уравнения

$$j^i(t, \eta, x, u) = x^i + \overset{\circ}{a} \int_0^t u^j \overset{\circ}{\sigma}^{f^{ij}}(\eta f(s, \eta, x, u)) ds, \quad i = \overline{1, p}.$$

Теорема 3. Пусть f^{ij} , $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены. $L^j(t)$, $j = \overline{1, q}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда S -ассоциированное решение задачи Коши (3) является решением системы уравнений (9), если для любого $t \in T$ выполняется $|x_{n0}(t_t) - x_0| \in \mathbb{R}_+$.

Список цитированных источников

1. Каримова, Т.И. Об ассоциированных решениях нестационарных систем уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов / Т.И. Каримова, О.Л. Яблонский // Вест. Белорус. гос. ун-та. – Серия 1: Физика. Математика. Информатика. – 2009. – №2. – С. 81–86.
2. Миллер, Б.М. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями / Б.М. Миллер, Е.Я. Рубинович – М.: Наука, 2005. – 429 с.

УДК 517.925

ИНВАРИАНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОДГРУПП ЛИ ГРУППЫ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Завадский А.Ф.

*Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, г. Брест
 Научный руководитель: Юдов А.А., к.физ.-мат.н., доцент*

Работа посвящена исследованию свойств подгрупп Ли группы Ли движений четырехмерного евклидова пространства R_4 . Для всех подгрупп Ли группы Ли вращений пространства R_4 находятся все инвариантные подпространства и все инвариантные прямые и k -плоскости.

Одной из важных задач геометрии является задача исследования подгрупп Ли преобразований различных пространств. Особое место в ряду этих исследований занимает задача изучения подгрупп Ли групп Ли движений различных (псевдо)евклидовых пространств. Значимость этой задачи вытекает из того, что геометрия (псевдо)евклидовых пространств находит широкое применение в различных разделах математики и теоретической физики. Исследованиями в этом направлении занимались А.С. Феденко, И.В. Белько, В.Г. Копп, Р.Ф. Билялов, А.А. Юдов и другие. В данной работе исследуется группа Ли движений четырехмерного евклидова пространства.

Рассмотрим четырехмерное евклидово пространство, т.е. пространство R_4 . Пусть G - группа Ли движений пространства R_4 , H - группа Ли вращений пространства R_4 , \overline{G} - алгебра Ли группы Ли G , \overline{H} - алгебра Ли группы Ли H .

Рассмотрим в пространстве R_4 ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, т.е.

$$\overline{e_1^2} = \overline{e_2^2} = \overline{e_3^2} = \overline{e_4^2} = 1, (\overline{e_i} = \overline{e_j}) = 0, i \neq j.$$

Выберем в алгебре Ли \overline{G} базис:

$$i_1 = E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_5 = E_{23} - E_{32}, i_6 = E_{24} - E_{42}, \\ i_8 = E_{34} - E_{43}, i_9 = E_{35} - E_{53}, i_{10} = E_{45} - E_{54},$$

где E_{ab} - (5×5) - матрицы, у которых в a - й строке, b - м столбце стоит 1, а остальные элементы нули. При этом вектора i_1, i_2, i_3, i_4 задают базис алгебры Ли группы Ли параллельных переносов, а вектора $i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}$ задают базис алгебры Ли \overline{H} группы Ли H вращений пространства R_4 .

Группа Ли G является полупрямым произведением группы Ли H вращений пространства R_4 и группы T_4 параллельных переносов этого пространства: $G = H * T_4$. Алгебра Ли \overline{G} является прямой суммой алгебр Ли \overline{H} и t_4 , где t_4 алгебра Ли группы Ли T_4 : $\overline{G} = \overline{H} \dot{+} t_4$. Для векторов пространства \overline{H} определяется операция $[a, b]$ - коммутирование, а сам результат называется коммутатором. Операция коммутирования в алгебре Ли \overline{G} определяется по правилу $[A, B] = AB - BA$. Чтобы вектор a с координатами $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ был инвариантен относительно подгруппы Ли G_i с алгеброй Ли \overline{G}_i необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $a \times c = I \times c$, где c - любое из \overline{G}_i . В частности, вместо c достаточно брать вектора базиса \overline{G}_i .

Чтобы подпространство $\{a, b\}$ было инвариантно относительно подгруппы G_i необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$a \times c = l \times a + m \times b,$$

$$b \times c = n \times a + s \times b.$$

В данной работе находятся инвариантные одномерные и двумерные подпространства групп Ли $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$ соответствующие алгебрам Ли $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3, \overline{G}_4, \overline{G}_5, \overline{G}_6$. Все подгруппы Ли группы Ли G классифицированы. Всего существует с точностью до сопряженности 6 подгрупп Ли группы Ли H вращений: $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$, которым соответствуют алгебры Ли $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3, \overline{G}_4, \overline{G}_5, \overline{G}_6$, задаваемые соответственно векторами $\{i_5\}, \{i_5 + i_{10}\}, \{i_5, i_{10}\}, \{i_8, i_9, i_{10}\}, \{i_5 - i_7, i_8 - i_{10}, i_6 - i_9\}, \{i_5, i_{10}, i_6 + i_9, i_7 - i_8\}$.

Рассмотрим группу G_1 . Найдем одномерные инвариантные подпространства.

Условие инвариантности имеет вид:

$$a \times i_5 = (a_1, a_2, a_3, a_4) \times i_5 = (-a_2, a_1, 0, 0) = m \times a.$$

Отсюда следует система

$$\begin{cases} \dot{x} - a_2 = ma_1, \\ \ddot{x} a_1 = ma_2, \\ \ddot{x} 0 = ma_3, \\ \ddot{x} 0 = ma_4 \end{cases}$$

Решив данную систему, можно сделать вывод, что при $m=0$ инвариантное подмножество имеет вид: $\{l \bar{e}_3 + \bar{m}_4\}$

При $m \neq 0$ решений нет.

Рассмотрим двумерные инвариантные подпространства.

Система инвариантности имеет вид:

$$\begin{cases} a \dot{x}_5 = l \times a + m \times b \\ b \dot{x}_5 = n \times a + s \times b \end{cases}$$

Для решения данной системы достаточно рассмотреть 6 случаев:

$$\begin{matrix} 1^0: \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} & 2^0: \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} \\ 3^0: \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 4^0: \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \\ 5^0: \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 6^0: \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Рассмотрим случай 1^0 . Получим систему:

$$\begin{cases} 0 = l \times 1 + m \times 0 & -1 = n \times 1 + s \times 0 \\ 1 = l \times 0 + m \times 1 & 0 = n \times 0 + s \times 1 \\ 0 = l \times a + m \times g & 0 = n \times a + s \times g \\ 0 = l \times b + m \times d & 0 = n \times b + s \times d \end{cases}$$

Решая данную систему получим, что инвариантным двумерным подпространством для случая 1^0 является $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Аналогичным способом находим двумерные инварианты для остальных случаев.

Трехмерными инвариантными подпространствами для группы Ли G_1 являются подпространства $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, -\bar{m}_3 + l \bar{e}_4\}$, которые являются ортогональным дополнением к одномерным подпространствам $\{l \bar{e}_3 + \bar{m}_4\}$.

Решая таким же образом группы алгебры Ли $G_2 - G_6$ таким же способом так же приходим к определенным результатам.

Полученные результаты сформулируем в виде теорем.

Теорема 1. Относительно группы G_1 инвариантны только одномерные подпространства $\{l \bar{e}_3 + \bar{m}_4\}$, двумерные подпространства $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ и $\{\bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ и следующие трехмерные подпространства $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, -\bar{m}_3 + l \bar{e}_4\}$.

Теорема 2. Относительно группы G_2 нет инвариантных одномерных подпространств, двумерные подпространства $\{\bar{e}_1 + l \bar{e}_3 + \bar{m}_4, \bar{e}_2 + \bar{m}_3 - l \bar{e}_4\}$, $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ и $\{\bar{e}_3, \bar{e}_4\}$, трехмерных инвариантных подпространств не существует.

Теорема 3. Относительно группы G_3 нет инвариантных одномерных подпространств, двумерные подпространства $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ и $\{\overline{e_3}, \overline{e_4}\}$, трехмерных инвариантных подпространств не существует.

Теорема 4. Относительно группы G_4 инвариантны только одномерные подпространства $\{\overline{e_1}\}$, инвариантных двумерных и трехмерных подпространств не существует.

Теорема 5. Относительно группы G_5 нет инвариантных одномерных, двумерных и трехмерных.

Теорема 6. Относительно группы G_6 нет одномерных инвариантных подпространств, двумерные подпространства $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ и $\{\overline{e_3}, \overline{e_4}\}$, трехмерных инвариантных подпространств не существует.

Список цитированных источников

1. Зубей, Е.В. Геометрические характеристики связных подгрупп Ли группы Ли вращений пространства Минковского / Е.В. Зубей, А.А. Юдов // Вестник БрГУ. – 2014. – №1. – С. 52–59.
2. Юдов, А.А. Исследование однородных пространств с фундаментальной группой G - группой движения пространства R_4^2 / А.А. Юдов, Е.Е. Гурская // Вестник БрГУ. – 2008. №1(30). – С. 35–41.

УДК 519.711.3

МЕТОД ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК В ИЗМЕРЕНИИ И АНАЛИЗЕ УРОВНЕЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ МАРКЕТИНГОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ

Зацепина Е.В., Гарчук И.М.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Научный руководитель: Высоцкий О.А., д.э.н., профессор

Математические методы обработки информации являются важнейшим инструментом анализа экономических явлений и процессов, построения теоретических моделей, позволяющих отобразить существующие связи в экономической жизни, прогнозировать поведение экономических субъектов и экономическую динамику.

При определении стартовых значений уровней управляемости специальной функции управления маркетинговой деятельностью организации посредством проведения экспресс-диагностики общих функций управления часто возникают проблемы дефицита достоверной информации. В этих условиях, бесспорно, для сбора необходимой информации следует опираться на опыт, знания и интуицию опытного персонала, специалистов, то есть необходимо использовать методы экспертных оценок – методы организации работы со специалистами-экспертами, обработки мнений экспертов, выраженных в количественной и/или качественной форме с целью разработки математического описания и моделей исследуемого объекта или подготовки информации для принятия решений представителями высшего и среднего звеньев управления [1].

Рассмотрим основные результаты проведения экспертных оценок с использованием математических методов для их анализа с целью построения динамики развития управляемости функции маркетинга на одном из предприятий Брестского региона ПКУПП «Коммунальник». Определение начальных условий, называемых стартовыми, связано с оценкой уровней управляемости общих функций управления, образующих поле управляемости маркетинговой деятельностью в стартовый момент времени t_0 . Стартовые условия уровней управляемости общих функций управления определяют проблемы и задачи, возникающие при совершенствовании процессов управления маркетинговой деятельностью с целью развития рынка дополнительных платных услуг населению. Далее можно разработать программу действий, необходимых для улучшения ситуации и решения актуальных задач деятельности предприятия [1].

В качестве экспертов привлекались руководители, возглавляющие оказание платных услуг по семи направлениям и осуществляющих текущее управление маркетинговой деятельностью. Соответственно группа экспертов состояла из 7 человек, каждый из которых оценивал свой рынок дополнительных платных услуг.

Определение стартовых значений уровней управляемости маркетинговой деятельностью осуществлялось посредством оценки общих функций управления. В качестве инструмента экспертного опроса использовалась разработанная анкета оценки развитости специальной функции маркетинга по 10-балльной шкале. На основании полученных оценок определялись уровни управляемости каждой из общих функций управления (принятие решений, контроль, учёт, планирование, анализ и оценка, корректировка, стимулирование).

Разброс уровней управляемости маркетинговой деятельностью ПКУПП «Коммунальник» составил 34% (от 35 % до 69 %), следовательно, часть функций управления находится в достаточно низкой зоне управляемости. Обобщающий уровень управляемости маркетинговой деятельностью равен 52%, что соответствует зоне санации.

Для определения степени согласованности мнения экспертов рассчитан коэффициент конкордации. Результаты расчёта промежуточных данных для определения коэффициента конкордации представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Расчёт промежуточных данных для определения коэффициента конкордации

Эксперты	Оценка общих функций управления маркетинговой деятельностью							Σ
	ПР	К	УЧ	ПЛ	АиО	КОР	СТ	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	6	5	5	3	5	5	-
2	6	7	7	6	3	4	4	-
3	6	7	6	6	3	4	5	-
4	8	5	7	5	4	5	5	-
5	6	5	6	6	4	4	4	-
6	8	7	6	6	5	5	4	-
7	6	4	5	5	3	2	4	-
Сумма баллов по каждой общей функции $\overset{m}{\underset{j=1}{\overset{\circ}{a}}} X_{j1}; \overset{m}{\underset{j=1}{\overset{\circ}{a}}} X_{j2}; \dots; \overset{m}{\underset{j=1}{\overset{\circ}{a}}} X_{jn}$	48	41	42	39	25	29	31	-
Средний балл (средний ранг) $a = \frac{1}{2} m' (n + 1)$	28	28	28	28	28	28	28	-
Отклонение суммы баллов от среднего балла (ранга), возведённое в квадрат $S = \overset{n}{\underset{i=1}{\overset{\circ}{a}}} \overset{m}{\underset{j=1}{\overset{\circ}{a}}} X_{ji} - a \overset{m}{\underset{j=1}{\overset{\circ}{a}}} P_j$	400,0	169,0	196,0	121,0	9,0	1,0	9,0	905,0

Использовалась формула расчёта коэффициента конкордации W для случая, когда имеются связанные ранги (одинаковые значения в оценках одного эксперта) [3]:

$$W = \frac{S}{\frac{1}{2} \cdot m^2 \cdot (n^3 - n) - m \overset{m}{\underset{j=1}{\overset{\circ}{a}}} P_j} \tag{1}$$

где $S = 905, n = 7, m = 7$.

Рассчитаны поправочные коэффициенты по формуле:

$$P_j = \frac{1}{12} \sum_{g=1}^l (p_g^3 - p_g) \quad (2)$$

P_j – поправочный коэффициент для j -го эксперта. Он вычисляется по всем l случаям повторяющихся элементов в оценках j -ого эксперта, p_g – количество элементов в l -й связке для j -го эксперта (количество повторяющихся элементов) [2]. Значения поправочных коэффициентов приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Значения поправочных коэффициентов

Эксперты	Поправочные коэффициенты	
	$P_j = p^3 - p$	$P_j / 12$
1	2	3
1	$4^3 - 4 = 60$	5
2	$(2^3 - 2) + (2^3 - 2) + (2^3 - 2) = 18$	1,5
3	$3^3 - 3 = 24$	2
4	$4^3 - 4 = 60$	5
5	$(3^3 - 3) + (3^3 - 3) = 48$	4
6	$(2^3 - 2) + (2^3 - 2) = 12$	1
7	$(2^3 - 2) + (2^3 - 2) = 12$	1

$W = 0,67$ говорит о наличии высокой степени согласованности мнений экспертов.

Определена оценка значимости коэффициента конкордации, для этой цели вычислен критерий согласования Пирсона:

$$c_p^2 = \frac{S}{\frac{1}{12} m' n' (n-1) - \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^m P_j} = \frac{905}{\frac{1}{12} 7' 7' (7-1) - \frac{1}{7-1} 19,5} = 42,59$$

Вычисленный c_p^2 сравнивался с табличным значением для числа степеней свободы, равного 6 и при заданном уровне значимости $\alpha = 0,05$. Так как расчетный c_p^2 больше табличного c_T^2 (12.59159), то коэффициент конкордации $W = 0,67$ - величина не случайная, а потому полученные данные имеют смысл и могут использоваться в дальнейших исследованиях.

Экспресс-диагностика маркетинговой деятельности ПКУПП «Коммунальник» посредством метода экспертных оценок позволила измерить (оценить в количественных показателях) стартовый уровень управляемости маркетинговой деятельностью $УУ_{мд}(t_0)$ и построить траекторию развития маркетинга (TRM) то есть $TRM = f(УУ_{мд}(T))$, с учётом времени T . По итогам диагностики разработана программа, которая определяет перечень заданий, действий и мероприятий, способствующих реализации намеченных целей развития рынка дополнительных платных услуг и позволяет за конкретный интервал времени (Δt_i) достичь успешного развития общих функций управления и маркетинга как специальной функции в целом.

Список цитированных источников

1. Высоцкий, О.А. Теория измерения управляемости хозяйственной деятельностью предприятий / Под науч. ред. Р.С. Седегова. – Мн.: ИООО «Право и экономика», 2004. – 396 с.
2. Ромашкина, Г.Ф. Коэффициент конкордации в анализе социологических данных / Г.Ф. Ромашкина, Г.Г. Татарова // Социология: методология, методы, математические модели. – 2005. – №20.

УДК 004.42:51

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ В MATHCAD

Кофанов В.А., Хомицкая Т.Г.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Очень часто при замене дискретных данных (X, Y) функцией, вид которой априори неизвестен, применяют метод интерполяции кубическими сплайнами. В системе компьютерной математики MathCAD для реализации этого метода используют встроенные функции: *Ispline*, *pspline* и *cspline*, отличительные особенности которых друг от друга рассмотрены нами в работе [1]. В данной статье рассмотрим алгоритм определения коэффициентов кубических сплайнов, заложенный в указанные встроенные сплайн-функции в MathCAD.

Суть метода сплайн-интерполяции заключается в том, что на каждом частичном отрезке между соседними точками необходимо подобрать такие коэффициенты кубического полинома, чтобы в каждой точке (X, Y) обеспечивалась неразрывность функции $f(x)$, ее первой и второй производной. В MathCAD осуществить такого рода подбор можно путем решения системы уравнений.

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(X_i) = Y_i; & n \text{ уравнений} \quad (1a) \\ f(X_j)|_{x_j-0} = f(X_j)|_{x_j+0}; & (n-2) \text{ уравнений} \quad (1б) \\ f'(X_j)|_{x_j-0} = f'(X_j)|_{x_j+0}; & (n-2) \text{ уравнений} \quad (1в) \\ f''(X_j)|_{x_j-0} = f''(X_j)|_{x_j+0}. & (n-2) \text{ уравнений} \quad (1г) \\ i = 1..n; j = 2..(n-1) \end{array} \right.$$

где n – общее количество точек.

Исходя из сути метода, количество уравнений, чаще всего, будет равно $(m-2)=4 \cdot n-6$, где m – количество неизвестных коэффициентов кусочно-кубического полинома. В связи с этим количество решений такой системы уравнений будет бесконечное множество.

Получить два недостающих уравнения можно путем добавления двух дополнительных ограничений. Ограничения могут быть различного рода:

- известно точное значение первой производной функции $f(x)$ в первой и последней точках (фундаментальный сплайн);
- значение второй производной функции $f(x)$ в первой и последней точках равно нулю (естественный сплайн);
- представить первый и последний частичный отрезок сплайна полиномом второй степени (параболой);
- представить первые и последние два частичных отрезка сплайна одним кубическим полиномом;
- задать периодические граничные условия.

MathCAD предоставляет возможность использовать три типа таких ограничений, которые заложены в работу трех встроенных сплайн-функций.

Встроенная функция *Ispline* подразумевает следующие дополнительные ограничения: вторая производная функции $f(x)$ равна нулю в первой и последней точках.

$$\left\{ \begin{array}{ll} f''(X_1) = 0; & f''(X_n) = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

В этом случае система уравнений с учетом (1) и (2) в MathCAD при $n=5$ будет такой, как показано на рисунке 1. Решим эту систему уравнений и отобразим на графике (рисунок 2) все найденные функции кусочно-кубических полиномов, а также функцию, полученную с помощью *Ispline*.

$$f_3(a, b, c, d, x) := a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \quad d1_f_3(a, b, c, x) := \frac{d}{dx} f_3(a, b, c, d, x) \quad d2_f_3(a, b, x) := \frac{d^2}{dx^2} f_3(a, b, c, d, x)$$

$$f(x) := \text{interp}(\text{Ispline}(X, Y), X, Y, x)$$

Given

$$\begin{aligned} f_3(A_1, B_1, C_1, D_1, X_1) &= Y_1 \\ f_3(A_1, B_1, C_1, D_1, X_2) &= Y_2 \\ f_3(A_2, B_2, C_2, D_2, X_3) &= Y_3 \\ f_3(A_3, B_3, C_3, D_3, X_4) &= Y_4 \\ f_3(A_4, B_4, C_4, D_4, X_5) &= Y_5 \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} f_3(A_1, B_1, C_1, D_1, X_2) &= f_3(A_2, B_2, C_2, D_2, X_2) \\ f_3(A_2, B_2, C_2, D_2, X_3) &= f_3(A_3, B_3, C_3, D_3, X_3) \\ f_3(A_3, B_3, C_3, D_3, X_4) &= f_3(A_4, B_4, C_4, D_4, X_4) \end{aligned} \quad (1б)$$

$$(1г)$$

$$\begin{aligned} d2_f_3(A_1, B_1, X_2) &= d2_f_3(A_2, B_2, X_2) \\ d2_f_3(A_2, B_2, X_3) &= d2_f_3(A_3, B_3, X_3) \\ d2_f_3(A_3, B_3, X_4) &= d2_f_3(A_4, B_4, X_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d1_f_3(A_1, B_1, C_1, X_2) &= d1_f_3(A_2, B_2, C_2, X_2) \\ d1_f_3(A_2, B_2, C_2, X_3) &= d1_f_3(A_3, B_3, C_3, X_3) \\ d1_f_3(A_3, B_3, C_3, X_4) &= d1_f_3(A_4, B_4, C_4, X_4) \end{aligned} \quad (1в)$$

$$\begin{aligned} d2_f_3(A_1, B_1, X_1) &= 0 \\ d2_f_3(A_4, B_4, X_5) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

+
s := Find(A, B, C, D)

Рисунок 1 – Система уравнений в MathCAD для определения коэффициентов кусочно-кубических полиномов, составляющих функцию *Ispline* при $n=5$

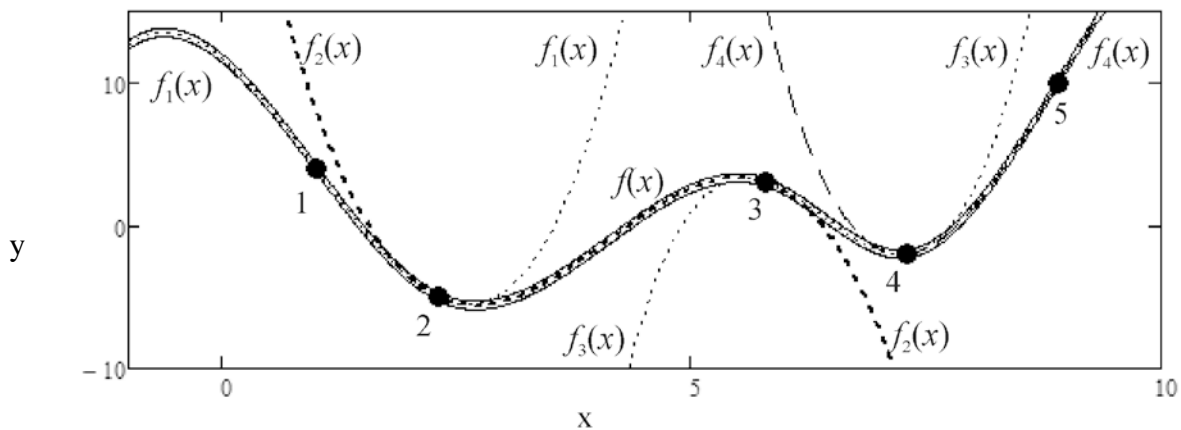


Рисунок 2 – График сплайн-интерполяции по функции *Ispline* (при $n=5$) и составляющих его кубических полиномов

Из графика на рисунке 2 видно, что на всех частичных отрезках найденная с помощью *Ispline* сплайн-функция $f(x)$ действительно описывается кубическими полиномами $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$. В первой и последней точках у функции $f(x)$ наблюдается перегиб, который наиболее ярко можно увидеть, построив график ее второй производной.

Встроенная функция *cspline* подразумевает следующие дополнительные ограничения: кубические полиномы на первом и втором частичных отрезках одинаковы, а также одинаковы на последнем и предпоследнем. Отмеченные ограничения исключают из системы уравнений (1) уравнения (1б), (1в), (1г) для второй и предпоследней точек, т.е. количество уравнений в системе (1) уменьшится на 6 $((m-2)-6)$, а количество неизвестных – на 8 $(m-8)$, тем самым уравнивая количество уравнений в системе и количество неизвестных.

Решая полученную систему уравнений при $n=5$ (рисунок 3), находим коэффициенты кусочно-кубических полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$, которые покажем на рисунке 4 вместе с кубическим сплайном $f(x)$, определенным с помощью встроенной функции *cspline*.

$$\begin{array}{l}
 f(x) := \text{interp}(\text{cspline}(X, Y), X, Y, x) \\
 \text{Given} \\
 \begin{array}{l}
 \text{f3}(A_1, B_1, C_1, D_1, X_1) = Y_1 \quad \text{f3}(A_2, B_2, C_2, D_2, X_4) = Y_4 \\
 \text{f3}(A_1, B_1, C_1, D_1, X_2) = Y_2 \quad \text{f3}(A_2, B_2, C_2, D_2, X_5) = Y_5 \\
 \text{f3}(A_1, B_1, C_1, D_1, X_3) = Y_3 \quad (1a)
 \end{array} \\
 \begin{array}{l}
 \text{f3}(A_1, B_1, C_1, D_1, X_3) = \text{f3}(A_2, B_2, C_2, D_2, X_3) \quad (1б) \\
 \text{d1_f3}(A_1, B_1, C_1, X_3) = \text{d1_f3}(A_2, B_2, C_2, X_3) \quad (1B) \\
 \text{d2_f3}(A_1, B_1, X_3) = \text{d2_f3}(A_2, B_2, X_3) \quad (1Г)
 \end{array} \\
 s := \text{Find}(A, B, C, D)
 \end{array}$$

Рисунок 3 – Система уравнений в MathCAD для определения коэффициентов кусочно-кубических полиномов, составляющих функцию cspline при n=5

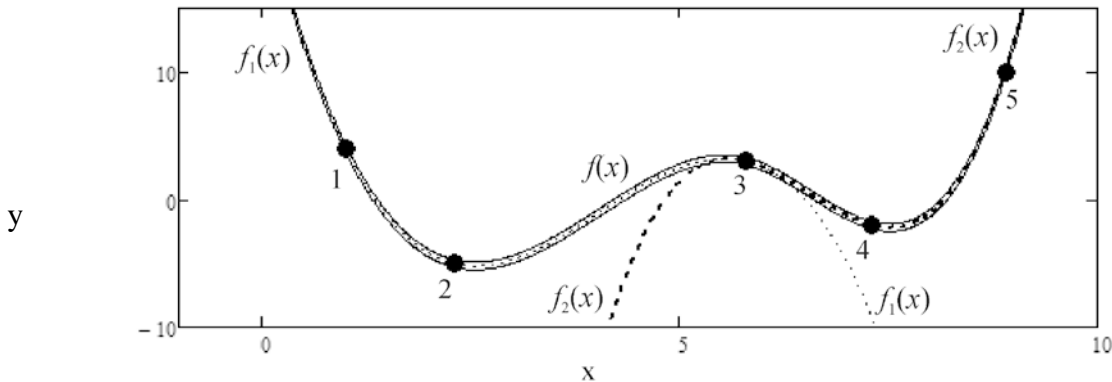


Рисунок 4 – График сплайн-интерполяции по функции cspline (при n=5) и составляющих его кубических полиномов

Из графика на рисунке 4 видно, что на первых двух частичных отрезках найденная сплайн-функция $f(x)$ описывается одним и тем же кубическим полиномом $f_1(x)$. Аналогичное поведение наблюдается и на последних двух частичных отрезках, описываемых кубическим полиномом $f_2(x)$.

Пользователь MathCAD полагает, что, используя любую встроенную сплайн-функцию, он на каждом частичном отрезке получает функцию кубического полинома. Это не совсем так.

Встроенная функция *pspline* подразумевает, что на первом и последнем отрезках функция $f(x)$ описывается полиномом второй степени – параболой. В результате чего уменьшается количество неизвестных на 2 ($m-2$) и система уравнений (1) (рисунок 5) имеет одно единственное решение (рисунок 6).

$$\begin{array}{l}
 \text{f3}(a, b, c, d, x) := a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \quad \text{d1_f3}(a, b, c, x) := \frac{d}{dx} \text{f3}(a, b, c, d, x) \quad \text{d2_f3}(a, b, x) := \frac{d^2}{dx^2} \text{f3}(a, b, c, d, x) \\
 \text{f2}(a, b, c, x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad \text{d1_f2}(a, b, x) := \frac{d}{dx} \text{f2}(a, b, c, x) \quad \text{d2_f2}(a, x) := \frac{d^2}{dx^2} \text{f2}(a, b, c, x) \\
 f(x) := \text{interp}(\text{pspline}(X, Y), X, Y, x) \\
 \text{Given} \\
 \begin{array}{l}
 \text{f2}(A_1, B_1, C_1, X_1) = Y_1 \\
 \text{f2}(A_1, B_1, C_1, X_2) = Y_2 \\
 \text{f3}(A_2, B_2, C_2, D_2, X_3) = Y_3 \quad (1a) \\
 \text{f3}(A_3, B_3, C_3, D_3, X_4) = Y_4 \\
 \text{f2}(A_4, B_4, C_4, X_5) = Y_5
 \end{array} \\
 \begin{array}{l}
 \text{f3}(A_1, B_1, C_1, X_2) = \text{f3}(A_2, B_2, C_2, D_2, X_2) \\
 \text{f3}(A_2, B_2, C_2, D_2, X_3) = \text{f3}(A_3, B_3, C_3, D_3, X_3) \quad (1б) \\
 \text{f3}(A_3, B_3, C_3, D_3, X_4) = \text{f2}(A_4, B_4, C_4, X_4) \\
 \text{d1_f3}(A_1, B_1, X_2) = \text{d1_f3}(A_2, B_2, X_2) \\
 \text{d1_f3}(A_2, B_2, X_3) = \text{d1_f3}(A_3, B_3, X_3) \quad (1B) \\
 \text{d1_f3}(A_3, B_3, X_4) = \text{d1_f2}(A_4, B_4, X_4)
 \end{array} \\
 \begin{array}{l}
 (1Г) \\
 \text{d2_f2}(A_1, X_2) = \text{d2_f3}(A_2, B_2, X_2) \\
 \text{d2_f3}(A_2, B_2, X_3) = \text{d2_f3}(A_3, B_3, X_3) \\
 \text{d2_f3}(A_3, B_3, X_4) = \text{d2_f2}(A_4, X_4)
 \end{array} \\
 s := \text{Find}(A, B, C, D)
 \end{array}$$

Рисунок 5 – Система уравнений в MathCAD для определения коэффициентов кусочно-кубических полиномов, составляющих функцию pspline при n=5

Из графика на рисунке 6 видно, что сплайн-функция $f(x)$ на первом и последнем частичных отрезках действительно описывается параболой $f_1(x)$ и $f_4(x)$, а на остальных внутренних частичных отрезках – кубическим полиномом $f_2(x)$ и $f_3(x)$.

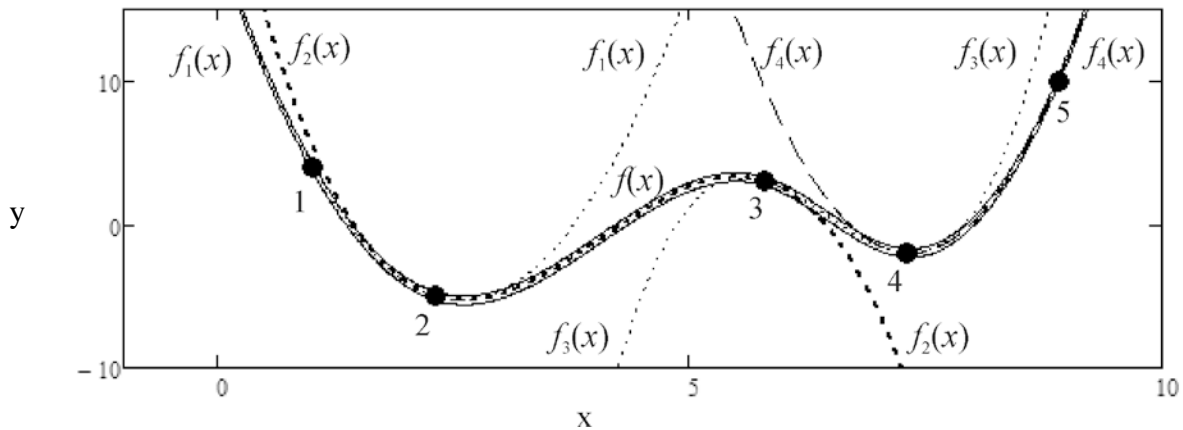


Рисунок 6 – График сплайн-интерполяции по функции pspline (при $n=5$) и составляющих его кубических полиномов

Показанные в работе примеры раскрывают пользователю MathCAD механизм работы встроенных сплайн-функций. Используя эту информацию при выполнении интерполяции дискретных данных, можно делать осознанный выбор в пользу той или иной функции.

Как было отмечено выше, встроенные сплайн-функции в MathCAD не могут охватить всего многообразия дополнительных ограничений, приводящих систему уравнений (1) к единственному решению. В этом случае можно использовать в MathCAD блок поиска решения системы уравнений Given..find, демонстрация которого подробно показана на рисунках 1, 3 и 5.

Список цитированных источников

1. Кофанов, В.А. Аппроксимация кубическим сплайном в MathCAD / В.А. Кофанов, Т.Г. Хомицкая // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 15–16 окт. 2014 г. / БрГУ имени А.С. Пушкина; под общ. ред. О.В. Матысика. – Брест, 2014. – С. 105–106.

УДК 519.65

О ПОГРЕШНОСТИ ЭРМИТОВА ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ПО СИСТЕМАМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Кучейко О.В.

Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, г. Брест

Научный руководитель: Худяков А.П., к.физ.-мат.н.

В [1] построен обобщенный интерполяционный многочлен Эрмита – Биркгофа степени $n + 1$ вида

$$\tilde{L}_{n+1}(t) = L_n(t) + \frac{w_n(t)(t_j + c_{n+1})^{n+2} \mathcal{L}_{n+1}(f; t_j)}{q_{n+1}(t)(n+1)!d_n}, \quad (1)$$

где $L_n(t) = \frac{1}{q_n(t)} \prod_{k=0}^n \frac{w_n(t)q_n(t_k)}{w_n(t_k)(t - t_k)} f(t_k)$, $q_n(t) = (t + c_0)(t + c_1) \dots (t + c_n)$,

$w_n(t) = (t - t_0)(t - t_1) \dots (t - t_n)$, $d_n = (t_0 + c_{n+1})(t_1 + c_{n+1}) \dots (t_n + c_{n+1})$. Здесь

$\mathcal{L}_{n+1}(f; t_j)$ – значение дифференциального оператора вида

$$\mathcal{L}_{n+1}f(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} [q_n(t)f(t)], \quad (2)$$

а $0 \leq c_0 < c_1 < \dots < c_n$ – некоторые неотрицательные действительные числа. Многочлен (1) удовлетворяет интерполяционным условиям вида

$$\tilde{L}_{n+1}(t_i) = f(t_i) \quad (i = \overline{0, n}); \quad \dot{\tilde{L}}_{n+1}(\tilde{L}_{n+1}; t_j) = \dot{L}_{n+1}(f; t_j). \quad (3)$$

Лемма. Пусть $(n + 1)$ -непрерывно-дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция $f(t)$ имеет на этом промежутке $n + 2$ нулей. Тогда на отрезке $[a, b]$ найдется такая точка x , что функция $\dot{L}_{n+1}(f; t)$, входящая в интерполяционную формулу (1), обращается в нуль в этой точке.

Введем обозначения: $B_n = (a + c_0)(a + c_1) \dots (a + c_n)$, $M_{n+1} = \max_{q \in [a, b]} \dot{L}_{n+1}(f; q)$.

Теорема. Оценка погрешности формулы (1) для любого $t \in [a, b]$ имеет вид:

$$|f(t) - \tilde{L}_{n+1}(t)| \leq \frac{(b - a)^{n+1} M_{n+1}}{B_n (n+1)!} + \frac{(t_j + c_{n+1})^{n+2}}{(a + c_{n+1})^{n+2}} \dots \quad (4)$$

Пример. Пусть $f(t) = e^{t+2}$. Рассмотрим частные случаи формулы (1) при $n = 1, 2, 3$, соответственно, с узлами $t_k^n = -1 + 2k/n$, $t_j^n = t_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}^n$, где $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ – целая часть числа $\frac{n+1}{2}$ ($k = \overline{0, n}$; $n = 1, 2, 3$). Интерполяционные многочлены в данном случае примут вид

$$\tilde{L}_2(t) = \frac{12,70}{t+2} - \frac{63,04}{t+3} + \frac{64,61}{t+4}, \quad \tilde{L}_3(t) = \frac{2,685}{t+2} + \frac{19,01}{t+3} - \frac{92,82}{t+4} + \frac{85,87}{t+5},$$

$$\tilde{L}_4(t) = \frac{7,8841}{t+2} - \frac{98,572}{t+3} + \frac{477,09}{t+4} - \frac{845,96}{t+5} + \frac{482,91}{t+6}.$$

Точность приближения функции $f(t)$ данными многочленами иллюстрируется на графике (рис. 1). Сплошная линия – график этой функции, штриховая – $\tilde{L}_2(t)$, штрихпунктирная – $\tilde{L}_3(t)$, пунктирной – $\tilde{L}_4(t)$.

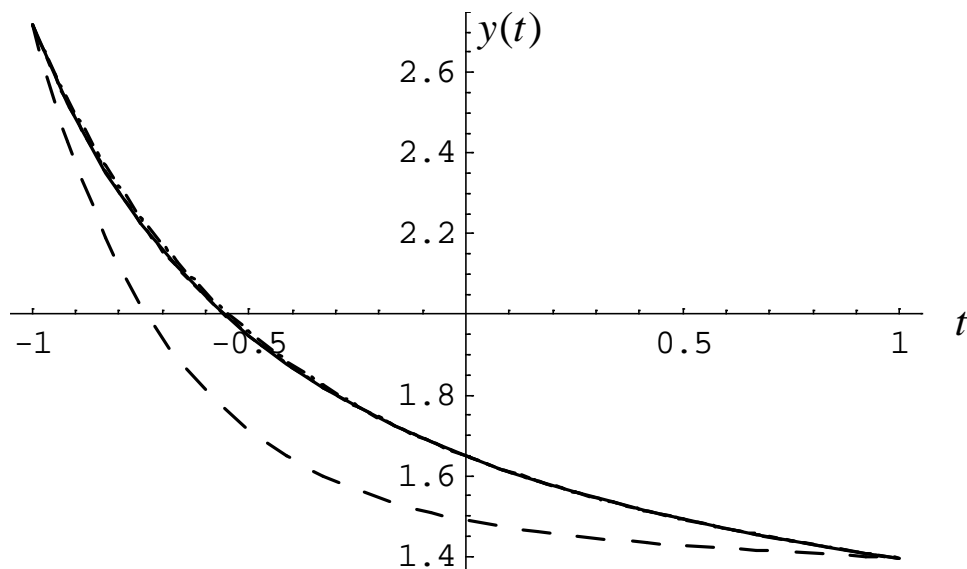


Рисунок 1 – Точность приближения функции $f(t)$

Интерполяционные многочлены $\tilde{L}_3(t)$ и $\tilde{L}_4(t)$ достаточно точно описывают поведение функции $f(t)$ на отрезке $[-1, 1]$. Нормы невязок между функцией $f(t)$ и интерполяционными многочленами $\tilde{L}_2(t)$, $\tilde{L}_3(t)$ и $\tilde{L}_4(t)$, равны

$$\|f(t) - \tilde{L}_2(t)\|_{C[-1,1]} = \max_{t \in [-1,1]} |f(t) - \tilde{L}_2(t)| = 0,236748;$$

$$\|f(t) - \tilde{L}_3(t)\|_{C[-1,1]} = 0,0171394; \quad \|f(t) - \tilde{L}_4(t)\|_{C[-1,1]} = 0,00101163.$$

В данном случае с увеличением степени интерполяционного полинома вида (1) точность приближения повышается более чем на один порядок.

УДК 519.2:004.6

О ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАКОНА ПУАССОНА И НЕКОТОРЫХ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

Липовцев А.П., Гладкий И.И., Каримова Т.И.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Научный руководитель: Махнист Л.П., к.т.н., доцент

Пуассона распределение - распределение вероятностей случайной величины X , принимающей целые неотрицательные значения $k = 0, 1, 2, \dots$ с вероятностями

$$P(X = k) = p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \text{ где } \lambda > 0 - \text{ параметр.}$$

Функция распределения закона Пуассона: $F(x) = P(X < x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{[x]-1} \frac{\lambda^k}{k!}$, если $x > 0$, где $[x]$ - наименьшее целое, большее или равное x : $[x] = \min \{n \in \mathbb{Z} | n \geq x\}$.

Рассмотрим функцию $F(m+1, \lambda) = 1 - \frac{\gamma(m+1, \lambda)}{m!} = 1 - \frac{1}{m!} \int_0^\lambda t^m e^{-t} dt$, где

$\gamma(m, \lambda) = \int_0^\lambda t^{m-1} e^{-t} dt$ - неполная нижняя гамма-функция (например, в [1]).

Заметим, что $F(1, \lambda) = 1 - \frac{1}{0!} \int_0^\lambda t^0 e^{-t} dt = 1 - \int_0^\lambda e^{-t} dt = 1 + e^{-t} \Big|_0^\lambda = e^{-\lambda} = p_0$.

Используя метод интегрирования по частям в определенном интеграле, получим

$$\begin{aligned} F(m+1, \lambda) &= 1 - \frac{1}{m!} \int_0^\lambda t^m e^{-t} dt = 1 + \frac{1}{m!} \int_0^\lambda t^m de^{-t} = 1 + \frac{1}{m!} \left(t^m e^{-t} \Big|_0^\lambda - \int_0^\lambda e^{-t} dt^m \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{m!} \left(\lambda^m e^{-\lambda} - m \int_0^\lambda e^{-t} t^{m-1} dt \right) = 1 + \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} - \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\lambda e^{-t} t^{m-1} dt = \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} + F(m, \lambda) = p_m + F(m, \lambda) = \dots = \sum_{k=1}^m p_k + F(1, \lambda) = \sum_{k=0}^m p_k. \end{aligned}$$

Следовательно, функцию распределения $F(x)$ можно определить следующим образом:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{k=0}^{[x]-1} p_k = F([x], \lambda) = 1 - \frac{1}{([x]-1)!} \int_0^\lambda t^{[x]-1} e^{-t} dt, \text{ если } x > 0.$$

Рассмотрим числовые последовательности $x_m = e^{-m} \sum_{k=0}^m \frac{m^k}{k!}$ и $y_m = e^{-m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{m^k}{k!}$.

Утверждение. Последовательность x_m является убывающей.

Доказательство. Так как $x_m = e^{-m} \sum_{k=0}^m \frac{m^k}{k!} = F(m+1, m) = 1 - \frac{1}{m!} \int_0^m t^m e^{-t} dt$, то используя

метод интегрирования по частям в определенном интеграле, получим:

$$x_m - x_{m-1} = \frac{1}{(m-1)!} \left(m^{m-1} e^{-m} - \int_{m-1}^m t^{m-1} e^{-t} dt \right).$$

Заметим, что $\frac{d}{dt}(t^{m-1} e^{-t}) = t^{m-2} e^{-t} (m-1-t) \leq 0$, если $t \geq m-1$.

Тогда $\min_{[m-1; m]}(t^{m-1} e^{-t}) = m^{m-1} e^{-m}$.

Так как $\int_{m-1}^m t^{m-1} e^{-t} dt > \int_{m-1}^m \min_{[m-1; m]}(t^{m-1} e^{-t}) dt = m^{m-1} e^{-m} \int_{m-1}^m dt = m^{m-1} e^{-m}$, то $x_m < x_{m-1}$, т. е.

последовательность $x_m = e^{-m} \sum_{k=0}^m \frac{m^k}{k!}$ является убывающей.

Утверждение. Последовательность y_m является возрастающей.

Доказательство. Так как $y_m = e^{-m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{m^k}{k!} = F(m, m) = 1 - \frac{1}{(m-1)!} \int_0^m t^{m-1} e^{-t} dt$, то используя

метод интегрирования по частям в определенном интеграле, получим:

$$y_m - y_{m-1} = \frac{1}{(m-1)!} \left((m-1)^{m-1} e^{-m+1} - \int_{m-1}^m t^{m-1} e^{-t} dt \right).$$

Заметим, что $\frac{d}{dt}(t^{m-1} e^{-t}) = t^{m-2} e^{-t} (m-1-t) \leq 0$, если $t \geq m-1$.

Тогда $\max_{[m-1; m]}(t^{m-1} e^{-t}) = (m-1)^{m-1} e^{-(m-1)}$.

Так как $\int_{m-1}^m t^{m-1} e^{-t} dt < \int_{m-1}^m \max_{[m-1; m]}(t^{m-1} e^{-t}) dt = (m-1)^{m-1} e^{-m+1} \int_{m-1}^m dt = (m-1)^{m-1} e^{-m+1}$, то

$y_m > y_{m-1}$, т. е. последовательность $y_m = e^{-m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{m^k}{k!}$ является возрастающей.

Легко доказать следующее утверждение.

Утверждение. Последовательности x_m и y_m являются ограниченными.

Утверждение. Для последовательностей x_m и y_m выполняется $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m$.

Доказательство. Так как пределы последовательностей x_m и y_m существуют, то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m - \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = \lim_{m \rightarrow \infty} (x_m - y_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(e^{-m} \sum_{k=0}^m \frac{m^k}{k!} - e^{-m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{m^k}{k!} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-m} \frac{m^m}{m!}.$$

Очевидно, что $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m - \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-m} \frac{m^m}{m!} \geq 0$.

Учитывая формулу Стирлинга (например, в [2]) $m^m e^{-m} \sqrt{2\pi m} < m! < m^m e^{-m+\frac{1}{12m}} \sqrt{2\pi m}$,

имеем $\frac{m^m e^{-m}}{m!} < \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}$. Тогда $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m - \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-m} \frac{m^m}{m!} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} = 0$.

Следовательно, $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m$.

Утверждение. Для последовательностей x_m и y_m выполняется равенство:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = 0,5 \text{ и выполняются неравенства: } 0,5 < x_m \leq x_1 = 2e^{-1} \text{ и } e^{-1} = y_1 \leq y_m < 0,5.$$

Доказательство. Пусть распределение случайной величины X задаётся плотностью вероятности, имеющей вид

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^{m-1}e^{-x}}{\Gamma(m)}, & x \geq 0 \end{cases}, \text{ где } \Gamma(m) = \int_0^{+\infty} t^{m-1}e^{-t} dt - \text{ гамма-функция Эйлера.}$$

Тогда говорят, что случайная величина X имеет гамма-распределение с параметром m и пишут $X : \text{Gamma}(m)$. Заметим, что гамма-распределение имеет математическое ожидание и дисперсию, которые равны параметру распределения m .

Согласно центральной предельной теореме, при больших m гамма-распределение может быть приближено нормальным распределением: $\text{Gamma}(m) \approx N(a; \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}$ с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 для которых $a = \sigma^2 = m$.

Следовательно, $\frac{x^{m-1}e^{-x}}{\Gamma(m)} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2m}}$ при больших m .

Тогда, учитывая, что $\Gamma(m) = (m-1)!$ ($m \in N$) и используя метод замены переменной в определенном интеграле, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(m-1)!} \int_0^m t^{m-1} e^{-t} dt &= \int_0^m \frac{t^{m-1} e^{-t}}{\Gamma(m)} dt \approx \int_0^m \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2m}} dt = \left| \begin{matrix} t = m - u\sqrt{m} \\ dt = -\sqrt{m} du \end{matrix} \right| = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{m}}^0 e^{-\frac{u^2}{2}} du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{m}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(\sqrt{m}), \text{ где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du - \text{ интеграл вероятностей (например,} \end{aligned}$$

в [2]). Таким образом, при больших m выполняется $y_m \approx 1 - \Phi(\sqrt{m})$.

Учитывая, что $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0,5$, получим: $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m = 1 - \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi(\sqrt{m}) = 0,5$.

Заметим так же, что при больших m выполняется: $x_m \approx 1 - \Phi(\sqrt{m})$, так как $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m$.

Поэтому выполняются неравенства: $0,5 < x_m \leq x_1 = 2e^{-1}$ и $e^{-1} = y_1 \leq y_m < 0,5$.

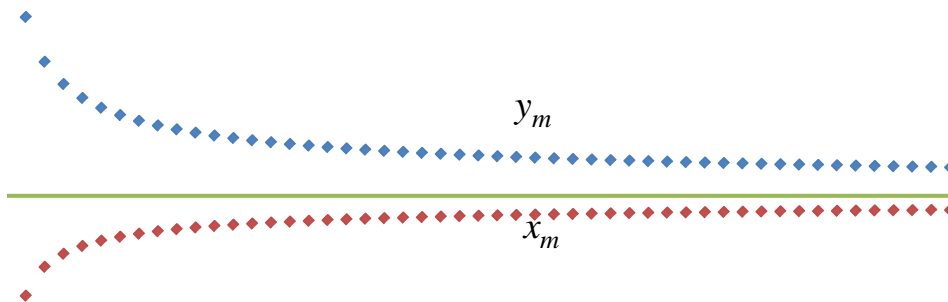
Утверждение. Для любого целого неотрицательного числа m существует единственное решение уравнения $F(m+1, \lambda) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^m \frac{\lambda^k}{k!} = 0,5$ относительно λ , принадлежащее интервалу $(m, m+1)$.

Доказательство. Функция $F(m+1, \lambda) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^m \frac{\lambda^k}{k!}$ для любого целого неотрицательного числа m является убывающей, так как

$$F'_\lambda(m+1, \lambda) = \left(1 - \frac{1}{m!} \int_0^\lambda y^m e^{-y} dy \right)' = -\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} < 0.$$

Так как $F(m+1, m+1) = y_{m+1} < 0,5$ и $F(m+1, m) = x_m > 0,5$, то для любых целого неотрицательного числа m существует единственное $\lambda_m \in (m, m+1)$ такое, что $F(m+1, \lambda_m) = e^{-\lambda_m} \sum_{k=0}^m \frac{\lambda_m^k}{k!} = 0,5$.

На рисунке изображены числовые последовательности x_m и y_m ($m = \overline{1, 50}$).



Используя полученные результаты, можно получить, например, следующие выводы: если параметр λ распределения Пуассона является натуральным числом, то медиана такого распределения равна этому параметру. Если параметр λ распределения Пуассона не является натуральным числом, то медиана такого распределения равна либо целой части параметра распределения $[\lambda]$, если $\lambda < \lambda_m$, или $[\lambda] = [\lambda] + 1$, если $\lambda > \lambda_m$, или принадлежит интервалу $[[\lambda], [\lambda] + 1]$, если параметр λ распределения равен $\lambda_m \in (m, m+1)$ - решению уравнения $e^{-\lambda} \sum_{k=0}^m \frac{\lambda^k}{k!} = 0,5$, где $[\lambda] = m$.

Список цитированных источников

1. Янке, Е. Специальные функции: формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш – М.: Наука, 1968. – 344 с.
2. Корн, Г.А. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г.А. Корн, Т.М. Корн – М.: Наука, 1984. – 832 с.

УДК 535:621.373.8

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАТРИЦ ПЕРЕНОСА ДЛЯ РАСЧЕТА ВОЛНОВОДОВ

Маркина А.А.

*Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Тарасюк Н.П.*

Для эффективного развития приборов оптоэлектроники необходимо применение сложных геометрий многослойных волноводов. Это осложняет аналитический расчет данных структур. Поэтому важное значение приобретают численные методы расчета волноводов. Для расчета оптических свойств слоистых структур широко используется метод матриц переноса (ММП).

Рассмотрим многослойную волноводную структуру [1]. Рассмотрим случай ТЕ – мод, распространяющихся в направлении оси z, направленной вдоль слоев. Выражение для напряженности электрического поля имеет вид:

$$E_y(x, z, t) = E_{y,j}(x) \exp[i(\omega t - b z)] \tag{1}$$

для j -го слоя. Амплитуда напряженности электрического вектора $E_{y,j}(x)$ удовлетворяет волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 E_{y,j}(x)}{\partial x^2} - (b^2 - k_0^2 \tilde{n}_j^2) E_{y,j}(x) = 0, \quad (2)$$

где $b = b_{re} + ib_{im}$ – проекция волнового вектора $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ на плоскость структуры, $\tilde{n}_j = n + ik$ – комплексный показатель преломления j -го слоя. Решение уравнения (2) имеет вид

$$E_{y,j}(x) = A_j \exp[g_j(x - L_j)] + B_j \exp[-g_j(x - L_j)], \quad (3)$$

где $g_j = \sqrt{b^2 - k_0^2 \tilde{n}_j^2}$, L_j – координаты границы между j и $j+1$ слоями, A_j и B_j – комплексные коэффициенты, определяемые из граничных условий.

Граничные условия следуют из непрерывности тангенциальной составляющей вектора напряженности электромагнитного поля и его производной вдоль нормали к поверхности. В данном случае они будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} A_j \exp[g_j d_j] + B_j \exp[-g_j d_j] &= A_{j+1} + B_{j+1} \\ A_j \frac{g_j}{g_{j+1}} \exp[-g_j d_j] - B_j \frac{g_j}{g_{j+1}} \exp[g_j d_j] &= A_{j+1} - B_{j+1} \end{aligned} \quad (4)$$

где d_j – толщина j -го слоя. Выражения (4) можно представить в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}A \\ \hat{e}B \end{pmatrix}_{j+1} = T_j \begin{pmatrix} \hat{e}A \\ \hat{e}B \end{pmatrix}_j, \quad (5)$$

где

$$T_j = \begin{pmatrix} \hat{e}(1 + \frac{g_j}{g_{j+1}}) \frac{\exp[g_j d_j]}{2} & (1 - \frac{g_j}{g_{j+1}}) \frac{\exp[-g_j d_j]}{2} \\ \hat{e}(1 - \frac{g_j}{g_{j+1}}) \frac{\exp[g_j d_j]}{2} & (1 + \frac{g_j}{g_{j+1}}) \frac{\exp[-g_j d_j]}{2} \end{pmatrix}$$

Рекурсивные соотношения для коэффициентов первого и последнего слоев имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}A \\ \hat{e}B \end{pmatrix}_m = T_{m-1} T_{m-2} \dots T_3 T_2 T_1 \begin{pmatrix} \hat{e}A \\ \hat{e}B \end{pmatrix}_1 = T_{tot} \begin{pmatrix} \hat{e}A \\ \hat{e}B \end{pmatrix}_1. \quad (6)$$

Для направляемых мод напряженность электромагнитного поля на бесконечности стремится к нулю $E_y(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$. Поэтому $B_1 = 0$, $A_m = 0$.

В результате получаем:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}0 \\ \hat{e}B_m \end{pmatrix} = T_{tot} \begin{pmatrix} \hat{e}A \\ \hat{e}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{e}t_{11} & t_{12} \\ \hat{e}t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}A \\ \hat{e}0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В итоге граничные условия сводятся к уравнению:

$$t_{11}(b) = 0. \quad (8)$$

Для решения уравнения (8) использовался алгоритм скоростного спуска.

По известной величине β , определялись эффективный показатель преломления n_{eff} и удельный фактор оптического ограничения структуры. Они имеют вид [2]:

$$n_{eff} = \frac{b_{re}}{k_0} \quad (9)$$

$$G = \frac{x_a}{x_b} \frac{\int_0^{x_b} E_y^2(x) dx}{\int_0^{x_a} E_y^2(x) dx} \quad (10)$$

где интегрирование в числителе происходит по толщине 1 нм в пике интенсивности.

Применение ММП покажем на простом примере плоского трехслойного симметричного волновода GaAs-Al_xGa_{1-x}As. Волновод образован двумя полубесконечными областями Al_xGa_{1-x}As с концентрациями Al, равными 10%, 20% и 30%, и показателями преломления n₁, соответственно равным 3.520, 3.448 и 3.385, и волноводным слоем с показателем преломления n₂=3.590. Толщина волноводного слоя изменялась от 0.1 до 1.0 мкм. Длина волны излучения равна 900 нм [3]. На рисунках 1 и 2 приведены зависимости удельного фактора оптического ограничения и эффективного показателя преломления от толщины волноводного слоя при концентрациях Al, равными 10%, 20% и 30%.

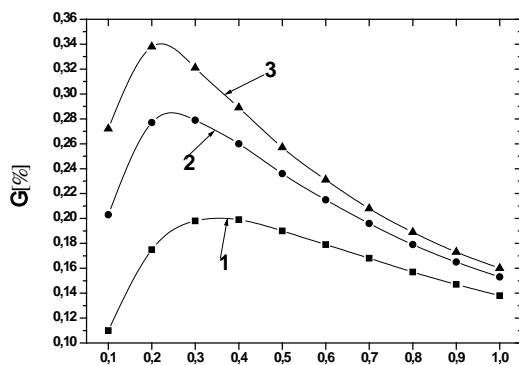


Рисунок 1 – Зависимость удельного фактора оптического ограничения от толщины волноводного слоя и концентрации Al:
1 – x=0.1, 2 – x=0.2, 3 – x=0.3

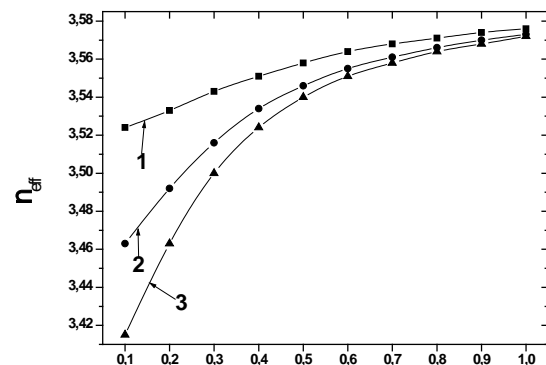


Рисунок 2 – Зависимость эффективного показателя преломления от толщины волноводного слоя и концентрации Al:
1 – x=0.1, 2 – x=0.2, 3 – x=0.3

На рисунке 1 видно, что максимальное значение удельного фактора оптического ограничения равно 0.338% и соответствует толщине волноводного слоя, равной 0.2 мкм, при концентрации Al, равной 30%. При концентрациях Al равных 10%, 20% и 30% толщина, соответствующая максимальному удельному фактору оптического ограничения, уменьшается и соответственно равна 0.4, 0.3 и 0.2 мкм. На рисунке 2 видно, что эффективный показатель преломления уменьшается при увеличении концентрации Al и увеличивается с ростом толщины волноводного слоя. При этом наибольший рост эффективного показателя преломления соответствует меньшим толщинам волноводного слоя. Значения эффективного показателя преломления при концентрациях Al 10% и 30% и толщине волноводного слоя 0.1 и 1 мкм примерно различаются соответственно на 3.2% и 0.1%.

Список цитированных источников

1. Bergmann, M.J. Optical-field calculations for lossy multiple-layer Al_xGa_{1-x}N/In_xGa_{1-x}N laser diodes / M.J. Bergmann, H.C. Casey, Jr. // J. Appl. Phys. – 1998. – Vol. 84. – Iss. 3. – P. 1196–1203.
2. Адамс, М. Введение в теорию оптических волноводов / М. Адамс. – Москва: Мир, 1984. – 512 с.
3. Кейси, К. Лазеры на гетероструктурах / К. Кейси, М. Паниш. – Москва: Мир, 1978. – Том 1. – 299 с.

УДК 519.6+517.983

АПРИОРНЫЙ ВЫБОР ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ В НЕЯВНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Мархель М.А.

Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, г. Брест
Научный руководитель: Матысик О.В., к.физ.-мат.наук, доцент

В гильбертовом пространстве H решается некорректное уравнение первого рода

$$Ax = y \quad (1)$$

с положительным ограниченным самосопряжённым оператором A , для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что $0 \in SpA$, поэтому задача (1) некорректна. Для решения задачи предлагается неявная итерационная схема

$$x_{n+1} = x_n - a(Ax_{n+1} - y), \quad x_0 = 0. \quad (2)$$

В случае, когда правая часть y уравнения (1) известна приближённо $\|y - y_d\| \leq d$, метод (2) примет вид

$$x_{n+1,d} = x_{n,d} - a(Ax_{n+1,d} - y_d), \quad x_{0,d} = 0. \quad (3)$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем вы-

боре n и достаточно малых d , т.е. что $\lim_{d \rightarrow 0} \inf_n \|x - x_{n,d}\| = 0$.

Теорема 1. Итерационный процесс (2) при условии $a > 0$ сходится.

Теорема 2. Итерационный процесс (3) сходится при условии $a > 0$, если выбирать число итераций n в зависимости от d так, чтобы $nd \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $d \rightarrow 0$.

Теорема 3. При условии $a > 0$ и $x = A^s z$, $s > 0$ оценка погрешности для итерационного метода (3) имеет вид

$$\|x - x_{n,d}\| \leq s^s (2na)^{-s} \|z\| + nad. \quad (4)$$

Оптимизируем по n полученную оценку погрешности. Для её минимизации производную по n от правой части оценки погрешности приравняем нулю. Получим

$$n_{\text{опт}} = sa^{-1} 2^{-s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} d^{-1/(s+1)}.$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в (4), найдём оптимальную оценку погрешности для метода (3):

$$\|x - x_{n,d}\|_{\text{опт}} \leq (1+s) 2^{-s/(s+1)} d^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}.$$

Рассмотрим погрешность метода (3) при счёте с округлениями. Пусть $x_{n,d}$ - точное значение, полученное по формуле (3), а z_n - приближённое решение, полученное по той же формуле с учётом вычислительных погрешностей g_n , т.е.

$$z_{n+1} = (E + aA)^{-1} (z_n + a y_d) + a g_n, \quad z_0 = 0. \quad (5)$$

Обозначим $e_n = z_n - x_{n,d}$ и вычтем из (5) равенство (3), получим

$e_{n+1} = (E + aA)^{-1} e_n + a g_n$. Так как нулевые приближения равны нулю, то $g_0 = 0$. По

индукции получим $e_n = \overset{\circ}{a} \sum_{k=0}^{n-1} (E + aA)^{-(n-1-k)} a g_k$. В силу $a > 0$ и принадлежности нуля

спектру оператора A имеем $\|(E + aA)^{-1}\| \leq 1$, поэтому $\|e_n\| \leq na g$, где $g = \sup_k |g_k|$.

Таким образом, общая оценка погрешности для неявного итерационного метода (3) с учётом вычислительных погрешностей имеет вид

$$\|x - z_n\| \leq \|x - x_{n,d}\| + \|x_{n,d} - z_n\| \leq s^s (2na)^{-s} \|z\| + nad + na\delta$$

УДК 519.6+517.983

СХОДИМОСТЬ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДВУХШАГОВОЙ ПРОЦЕДУРЫ ЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Минзер Е.И.

*Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина, г. Брест
Научный руководитель: Матысик О.В., к.физ.-мат.н., доцент*

В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A , для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A , поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения задачи предлагается явная итерационная двухшаговая процедура

$$x_n = 2(E - aA)x_{n-1} - (E - aA)^2 x_{n-2} + a^2 Ay, \quad x_0 = x_1 = 0. \tag{2}$$

В случае, когда правая часть y уравнения (1) известна приближённо $\|y - y_d\| \leq \delta$, метод (2) примет вид

$$x_{n,d} = 2(E - aA)x_{n-1,d} - (E - aA)^2 x_{n-2,d} + a^2 Ay_d, \quad x_{0,d} = x_{1,d} = 0. \tag{3}$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ .

Теорема 1. *Итерационный процесс (2) при условии $0 < a < 2/\|A\|$ сходится.*

Теорема 2. *Итерационный процесс (3) сходится при условии $0 < a \leq \frac{5}{4\|A\|}$, если выбирать число итераций n в зависимости от δ так, чтобы $n\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$.*

Теорема 3. *При условии $0 < a \leq \frac{5}{4\|A\|}$ и $x = A^s z$, $s > 0$ оценка погрешности для итерационного метода (3) имеет вид*

$$\|x - x_{n,d}\| \leq s^s (s+2) [(n-1)a e]^{-s} \|z\| + (5/4)(n-1)da. \tag{4}$$

Оптимизируем по n полученную оценку погрешности. Для её минимизации производную по n от правой части оценки погрешности приравняем нулю. Получим

$$n_{\text{опт}} = 1 + \frac{5}{4} \frac{d}{\delta} \frac{e^{-1/(s+1)}}{e^{-s/(s+1)} s(s+2)^{1/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} a^{-1}}.$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в (4), найдем оптимальную оценку погрешности для метода (3):

$$\|x - x_{n,d}\|_{\text{опт}} \leq (5/4)^{s/(s+1)} d^{s/(s+1)} e^{-s/(s+1)} (s+1)(s+2)^{1/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}.$$

УДК 517.958

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Наумовец С.Н.*Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Корзюк В.И., д.физ.-мат.н., профессор***1. Постановка задачи**

В замыкании $\bar{Q} = [0, \infty) \times [0, l]$ области $Q = (0, \infty) \times (0, l)$ двух независимых переменных $x = (x_0, x_1) \in \bar{Q} \cap R^2$ рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$Lu = (\mathbb{P}_{x_0 x_0} - a^2 \mathbb{P}_{x_1 x_1})u(x) = f(x), \quad (x) \in \bar{Q}, \quad (1)$$

где a^2, l – положительные действительные числа, $\mathbb{P}_{x_0 x_0} = \mathbb{P}^2 / \mathbb{P}x_0^2$, $\mathbb{P}_{x_1 x_1} = \mathbb{P}^2 / \mathbb{P}x_1^2$ – частные производные по x_0 и x_1 второго порядка. К уравнению (1) на границе $\mathbb{P}Q$ области Q присоединяются условия типа Коши и граничные условия на боковых ее частях

$$u(0, x_1) = j(x_1), \quad \mathbb{P}_{x_0} u(0, x_1) = y(x_1), \quad x_1 \in [0, l], \quad (2)$$

$$\mathbb{P}_{x_0}^2 u(x_0, 0) = m^{(1)}(x_0), \quad u(x_0, l) = m^{(2)}(x_0), \quad x_0 \in [0, \infty). \quad (3)$$

Здесь $f: \bar{Q} \rightarrow R$ – заданная функция на \bar{Q} , $j: [0, l] \rightarrow R$, $y: [0, l] \rightarrow R$ – функции на $[0, l]$, $m^{(j)}: [0, \infty) \rightarrow R$, заданные функции на $[0, \infty)$, гладкость которых будет уточнена ниже, $j = 1, 2$.

2. Решение уравнения (1)

Общее решение уравнения (1) представляет сумму общего решения $u^{(0)}$ однородного уравнения

$$(\mathbb{P}_{x_0 x_0} - a^2 \mathbb{P}_{x_1 x_1})u^{(0)}(x) = 0, \quad x \in \bar{Q}, \quad (4)$$

и частного решения v неоднородного уравнения (1).

Частное решение v уравнения (1) находим через решение однородного уравнения (4) w с параметром $t \in [0, \infty)$ по формуле

$$v(x) = \int_0^{x_0} w(x_0 - t, t, x_1) dt. \quad (5)$$

Здесь функция $w: (x_0, t, x_1) \in R$ – решение однородного уравнения

$$\mathbb{P}_{x_0 x_0} w(x_0, t, x_1) - a^2 \mathbb{P}_{x_1 x_1} w(x_0, t, x_1) = 0, \quad x_1 \in [0, l], \quad (6)$$

удовлетворяющего условиям Коши

$$w(0, t, x_1) = 0, \quad \mathbb{P}_{x_0} w(0, t, x_1) = f(t, x_1), \quad x_1 \in [0, l], t \in [0, \infty), \quad (7)$$

где f – правая часть уравнения (1).

Общее решение уравнения (6) есть сумма двух произвольных функций, а именно

$$w(0, t, x_1) = G^{(1)}(x_1 - ax_0, t) + G^{(2)}(x_1 + ax_0, t). \quad (8)$$

Подставив выражение (8) в условия Коши (7), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x_1, t) + G^{(2)}(x_1, t) &= 0, \quad x_1 \in [0, l], \\ -a \mathbb{P}_{x_1 - ax_0} G^{(1)}(x_1 - ax_0, t)(x_0 = 0) + a \mathbb{P}_{x_1 + ax_0} G^{(2)}(x_1 + ax_0, t)(x_0 = 0) &= f(t, x_1), \end{aligned}$$

или

$$-a \mathbb{I}_z G^{(1)}(z, t) + a \mathbb{I}_z G^{(2)}(z, t) = f(t, z), \quad z \in [0, l].$$

Из системы определяем частично значения функций $G^{(j)}$, а именно:

$$G^{(j,0)}(z, t) = \frac{(-1)^j}{2a} \overset{z}{\mathcal{D}} f(t, x) dx, \quad z \in [0, l], \quad j = 1, 2. \quad (9)$$

По условию задачи $x \in \bar{Q}$. Для всех этих значений x области определения $D(x_1 - ax_0) = (-\infty, l]$, $D(x_1 + ax_0) = [0, \infty)$ при $a > 0$. Поэтому области определения $D(G^{(1)}) = (-\infty, l] \cap [0, \infty)$, $D(G^{(2)}) = [0, \infty) \cap [0, \infty)$, так как функция f определена на \bar{Q} . Функции $G^{(j,0)}$ ($j = 1, 2$) с помощью формул (9) определены только на отрезке $[0, l]$ относительно первого независимого переменного. В связи с этим введем обозначения

$$G^{(j)}(z, t) = \begin{cases} G^{(j,0)}(z, t), & z \in [0, l], \\ G^{(j,1)}(z, t), & z \in D(g^{(j)}) \setminus [0, l], \end{cases} \quad (10)$$

где $D(g^{(1)}) = (-\infty, l]$, $D(g^{(2)}) = [0, \infty)$. Чтобы функции $G^{(j)}$, определяемые формулами (10), принадлежали классу $C^2(D(g^{(j)}))$ относительно первого аргумента, должны выполняться условия согласования

$$G^{(1,1)}(0, t) = 0, \quad \mathbb{I}_z G^{(1,1)}(z, t)|_{z=0} = -\frac{1}{2a} f(t, 0), \quad (11)$$

$$\mathbb{I}_z^2 G^{(1,1)}(z, t)|_{z=0} = -\frac{1}{2a} \mathbb{I}_z f(t, z)|_{z=0}.$$

$$G^{(2,1)}(l, t) = G^{(2,0)}(l, t) = \frac{1}{2a} \overset{l}{\mathcal{D}} f(t, y) dy,$$

$$\mathbb{I}_z G^{(2,1)}(z, t)|_{z=l} = \mathbb{I}_z G^{(2,0)}(z, t)|_{z=l} = \frac{1}{2a} f(t, l), \quad (12)$$

$$\mathbb{I}_z^2 G^{(2,1)}(z, t)|_{z=l} = \frac{1}{2a} \mathbb{I}_z f(t, z)|_{z=l}.$$

Через функцию w , определяемую соотношениями (9)–(12), введем функцию $v: \bar{Q} \cap (x_0, x_1) \rightarrow R$, значения которой вычисляются формулой (5), то есть

$$v(x) = \overset{x_0}{\mathcal{D}} G^{(1)}(x_1 - a(x_0 - t), t) dt + \overset{x_0}{\mathcal{D}} G^{(2)}(x_1 + a(x_0 - t), t) dt. \quad (13)$$

Заметим, что функции $G^{(j,0)}$ на все области определения $D(G^{(j)})$ ($j = 1, 2$) можно продлить полиномами, а именно

$$G^{(1,1)}(z, t) = -\frac{1}{2a} f(t, 0)z - \frac{1}{4a} \mathbb{I}_z f(t, z)|_{z=0} z^2,$$

$$G^{(2,1)}(z, t) = \frac{1}{2a} \overset{l}{\mathcal{D}} f(t, y) dy + \frac{1}{2a} f(t, l)(z - l) + \frac{1}{4a} \mathbb{I}_z f(t, z)|_{z=l} (z - l)^2.$$

Лемма 1. Если функция f принадлежит классу $C^{0,1}(\bar{Q})$ и для $G^{(j)}$, $j=1,2$, выполняются условия (11), (12) (условия согласования), то функция v , определенная формулами (13), (9)–(12), принадлежит классу $C^2(\bar{Q})$, является решением уравнения (1) и удовлетворяет однородным условиям Коши

$$v(0, x_1) = \mathbb{P}_{x_0} v(0, x_1) = 0. \quad (14)$$

3. Задача (1)–(5). Однородные условия согласования

Так как имеем частное решение v неоднородного уравнения (1), а общее решение u этого уравнения представимо в виде суммы $u(x_0, x_1) = u^{(0)}(x_0, x_1) + v(x_0, x_1)$, то дальнейшие исследования сводятся к решению однородного уравнения (4) относительно функции $u^{(0)}: \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$. В силу (14) решение $u^{(0)}$ должно удовлетворять условиям Коши

$$u^{(0)}(0, x_1) = j(x_1), \quad (15)$$

$$\mathbb{P}_{x_0} u^{(0)}(0, x_1) = \mathbb{P}_{x_0} (u - v) = \mathbb{P}_{x_0} u(0, x_1) - \mathbb{P}_{x_0} v(0, x_1) = y(x_1), \quad x_1 \in [0, l],$$

и граничным условиям

$$\mathbb{P}_{x_0}^2 u^{(0)}(x_0, 0) = m^{(1)}(x_0) - \mathbb{P}_{x_0}^2 v(x_0, 0) = \mathbb{M}^{(1)}(x_0), \quad (16)$$

$$u^{(0)}(x_0, l) = m^{(2)}(x_0) - v(x_0, l) = \mathbb{M}^{(2)}(x_0). \quad (17)$$

Общее решение уравнения (4) представляет собой сумму двух функций

$$u^{(0)}(x) = g^{(1)}(x_1 - ax_0) + g^{(2)}(x_1 + ax_0), \quad (18)$$

где $g^{(j)}$ – произвольные функции из класса $C^m(D(g^{(j)}))$. Области определения их как

функций одного независимого переменного z следующие: $D(g^{(1)}) = (-\infty, l] \cap \mathbb{R}$,

$D(g^{(2)}) = [0, \infty) \cap \mathbb{R}$, для любого $x \in \bar{Q}$. Из условий Коши находим значения $g^{(j)}(z)$

функций $g^{(j)}$, которые определяются формулами

$$g^{(j)}(z) = g^{(j,0)}(z) = \frac{1}{2} j(z) + \frac{(-1)^j}{2a} \int_0^z \ddot{y}(x) dx + (-1)^j C, \quad z \in [0, l], \quad (19)$$

где C – произвольная постоянная из множества действительных чисел \mathbb{R} .

Далее значения $g^{(j)}(z)$ для $z \in D(g^{(j)}) \setminus [0, l]$ определяются из граничных условий (16), (17).

$$g^{(1,k)}(z) = \int_0^z \ddot{y}(z-x) \mathbb{M}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{a} dx + C^{(1,k)} z + C^{(0,k)} - g^{(2,k-1)}(-z), \quad (20)$$

$$z \in \mathbb{R} \setminus kl, -(k-1)l,$$

$$g^{(2,k)}(z) = \mathbb{M}^{(2)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x-l}{a} \ddot{y} - g^{(1,k-1)}(2l-z), \quad z \in \mathbb{R} \setminus kl, (k+1)l, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

Из последних формул видно, что значения функций $g^{(j)}$, $j=1,2$, определены кусочно на соответствующих отрезках через значения заданных функций $j, y, \mathbb{M}^{(j)}$ ($j=1,2$), f . Поэтому, если потребовать достаточную гладкость этих функций, то и функции $g^{(j,k)}$ будут на указанных отрезках тоже гладкими, например, из клас-

са C^2 , $j=1,2$; $k=0,1,\dots$. Следовательно, и решение задачи (1)–(3) тоже будет кусочно-гладким. Нам надо, чтобы функция (18) была из класса $C^2(\bar{Q})$ на всем множестве \bar{Q} , так как согласно лемме 1 $v \in C^2(\bar{Q})$, если $f \in C^{0,1}(\bar{Q})$. Для этого потребуем, чтобы функции (19)–(21) и их производные первого и второго порядков совпадали в общих точках соприкосновения.

Таким образом, чтобы функция $g^{(1)}$ принадлежала $C^2(-\infty, l]$, а $g^{(2)}$ – классу $C^2[0, \infty)$, кроме требований на гладкость заданных функций $f, j, y, \varphi, m^{(j)}$ ($j=1,2$) задачи (4), (15), (16), (17) должны выполняться равенства

$$d^p g^{(1,k)}(z)|_{z=-kl} = d^p g^{(1,k+1)}(z)|_{z=-kl}, \quad k=0,1,\dots, \quad p=0,1,2, \quad (22)$$

$$d^p g^{(2,k-1)}(z)|_{z=kl} = d^p g^{(2,k)}(z)|_{z=kl}, \quad k=1,2,\dots, \quad p=0,1,2. \quad (23)$$

Лемма 2. Равенства (22) выполняются для всех $k=0,1,2,\dots$, а равенства (23) для $k=1,2,\dots$ тогда и только тогда, когда (22) выполняются только для $k=0$, а (23) – для $k=1$. При этом произвольные постоянные $C^{(i,k)}$ в формулах (20) должны быть одни и те же для всех $k=1,2,\dots$, то есть $C^{(i,k)} = C^{(i)}$.

Из равенств (22), (23) получаем условия согласования

$$C^{(0)} = j(0), \quad C^{(1)} = -\frac{1}{a}y(0), \quad \frac{1}{a^2}m^{(1)}(0) = j'(0), \quad (24)$$

$$m^{(2)}(0) = j(l), \quad m^{(2)\prime}(0) = y(l), \quad \frac{1}{a^2}m^{(2)\prime}(0) = j'(l). \quad (25)$$

Теорема 1. Если функции $j \in C^2([0, l])$, $y \in C^2([0, l])$, $m^{(1)} \in C^1([0, \infty))$, $m^{(2)} \in C^2([0, \infty))$, то функция вида (18) является единственным классическим решением из класса $C^2(\bar{Q})$ задачи (4), (2), (16), (17) тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования (24), (25), константы $C^{(i)} = C^{(i,k)}$, $k=1,2,3,\dots$

Теорема 2. Если функции $j \in C^2([0, l])$, $y \in C^2([0, l])$, $m^{(1)} \in C^1([0, \infty))$, $m^{(2)} \in C^2([0, \infty))$, $f \in C^{0,1}(\bar{Q})$, то существует единственное из класса $C^2(\bar{Q})$ классическое решение $u(x_0, x_1) = u^{(0)}(x_0, x_1) + v(x_0, x_1)$ тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования

$$\frac{1}{a^2}(m^{(1)}(0) - f(0,0) - a^2j'(0)) = 0,$$

$$m^{(2)}(0) - j(l) = 0, \quad m^{(2)\prime}(0) - y(l) = 0, \quad \frac{1}{a^2}(m^{(2)\prime}(0) - f(0,l) - a^2j'(l)) = 0$$

константы $C^{(i)} = C^{(i,k)}$, $k=1,2,3,\dots$, $i=0,1$, причем $C^{(0)} = j(0)$, $C^{(1)} = -\frac{1}{a}y(0)$, где

частное решение v определяется формулами (5), (8), (10), решение $u^{(0)}$ задачи (4), (2), (16), (17) – формулами (18)–(21).

Список цитированных источников

1. Корзюк, В.И. Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши / В.И. Корзюк, И.С. Козловская, С.Н. Наумовец // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – №1. – С. 17–20.

УДК 512.643

О ПОЛНОЙ СИСТЕМЕ ИНВАРИАНТОВ ИНВОЛЮЦИЙ

Пирштук Д.И.

Белорусский государственный университет, г. Минск

Научный руководитель: Дубров Б.М., к. физ.-мат. н., доцент

Пусть V — конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем K , $W \hat{=} V$ — некоторое подпространство, а линейное отображение $j : V \hat{\otimes} V \rightarrow V \hat{\otimes} V$ — некоторая инволюция ($j^2 = \text{id}$). Настоящая статья посвящена описанию полной системы инвариантов троек (V, j, W) с точностью до изоморфизма векторного пространства V .

Полученный результат (теорема о полной системе инвариантов инволюций), с одной стороны, имеет самостоятельный, чисто алгебраический характер, но с другой стороны, как следует из принципа Нагано [1, с. 81–85], он является также критерием локальной эквивалентности пары векторных полей с точностью до перестановки. Именно в рамках исследования по геометрической теории оптимального управления и возникла постановка данной задачи.

Инварианты пар (V, j) . Опишем сначала полную систему инвариантов пар (V, j) , то есть найдем такую систему инвариантов, которая характеризует, что пары (V, j) и $(V \hat{\otimes} j \hat{\otimes} \emptyset)$ эквивалентны (другими словами, построим критерий эквивалентности в терминах инвариантов).

Утверждение 1. Полная система инвариантов пар (V, j) есть тройка чисел (n, n_+, n_-) , где $n = \dim V$, $n_+ = \dim \ker(j - \text{id})$, $n_- = \dim \ker(j + \text{id})$.

Доказательство. Первым инвариантом является $\dim V$, иначе бы даже между V и $V \hat{\otimes} \emptyset$ не существовало бы изоморфизма. Пусть $\dim V = \dim V \hat{\otimes} \emptyset = n$. В силу теоремы об эквивалентности конечномерных пространств, не теряя общности, можно считать, что $V = V \hat{\otimes} \emptyset = K^n$. Кроме того, все собственные значения оператора j должны быть равны ± 1 , т.к. если $j(v) = l v$, то $v = j(j(v)) = l^2 v$. Таким образом, жорданова форма матрицы оператора j состоит из блоков из 1 или -1. Непосредственным возведением такого блока в квадрат легко проверить, что оператор j будет инволюцией тогда и только тогда, когда его жорданова нормальная форма — диагональная матрица с ± 1 на диагонали, т.е. матрица оператора j диагонализуема с собственными значениями ± 1 . Такие матрицы подобны тогда и только тогда, когда совпадают размерности собственных подпространств, соответствующих 1 и -1.

Положим далее $V_+ = \ker(j - \text{id})$ и $V_- = \ker(j + \text{id})$.

Утверждение 2. Если пары (V, j) и $(V \hat{\otimes} j \hat{\otimes} \emptyset)$ эквивалентны, то их собственные подпространства, отвечающие одному и тому же собственному значению, также изоморфны.

Доказательство. Пусть $j(v) = l v$, а f — изоморфизм. Тогда

$$j \hat{\otimes} f(v) = f(j(v)) = f(l v) = l f(v), \quad (1)$$

То есть $s(v)$ — собственный вектор $j \hat{\otimes} \emptyset$, отвечающий тому же собственному значению l .

Инварианты троек (V, j, W) . Наложим теперь на эквивалентность более строгое требование, а именно оно будет требовать не только существования такого изоморфизма $f : V \hat{\otimes} V \hat{\otimes} V \hat{\otimes} V \hat{\otimes} \emptyset$, что $f(j(v)) = j(f(v))$ для всех $v \hat{\in} V$, но и чтобы сужение изоморфизма f на W было изоморфизмом между подпространствами W и $W \hat{\otimes} \emptyset$. Таким образом, имеем, что наша задача — построить полную систему инвариантов троек (V, j, W) с точностью до изоморфизма векторного пространства V .

Очевидно, что одним из инвариантов наряду с тройкой (n, n_+, n_-) , известной из предыдущего пункта, является условие $\dim W = \dim W \hat{\otimes} \emptyset$, как условие существования изоморфизмов. Пусть $\dim W = \dim W \hat{\otimes} \emptyset = m$.

Выберем в V и $V\phi$ такие базисы, чтобы матрицы линейных отображений j и $j\phi$ в них были равны $A = \text{diag}\{1, 1, \dots, 1, -1, -1, \dots, -1\}$. Тогда условие (1) переписывается в виде матричного уравнения $FA = AF$, где $F \hat{=} K^{n' \times n}$ – матрица перехода от одного базиса к другому.

Для решения данного уравнения перепишем F и A в блочном виде:

$$A = \begin{pmatrix} E_{n_+} & 0 \\ 0 & -E_{n_-} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_1 & F_3 \\ F_4 & F_2 \end{pmatrix}$$

Тогда уравнение $FA = AF$ переписывается в виде

системы $F_3 = 0, F_4 = 0$. Следовательно, $F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix}$

Выберем в W и $W\phi$ некоторые базисы. Их матрицы в ранее выбранных базисах V и $V\phi$ также будем обозначать через W и $W\phi$.

Итак, имеем уравнение $FW = W\phi$. Т.к. собственные подпространства W и $W\phi$ изоморфны (см. утверждение 2), то $\dim W\phi \cap V_+$ и $\dim W\phi \cap V_-$ – инварианты тройки (V, j, W) .

Считая последние 2 инварианта выполненными, можно, не теряя общности, перейти от исследования троек (V, j, W) и $(V\phi, j\phi, W\phi)$ к исследованию троек $(V, j, W) / ((W\phi \cap V_+) \hat{\cup} (W\phi \cap V_-))$ и $(V\phi, j\phi, W\phi) / ((W\phi \cap V_+) \hat{\cup} (W\phi \cap V_-))$.

Перепишем матрицы W и $W\phi$ в блочном виде: $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, W\phi = \begin{pmatrix} w_1\phi \\ w_2\phi \end{pmatrix}$, где $w_1, w_1\phi \hat{=} K^{m' \times n_+}$ и $w_2, w_2\phi \hat{=} K^{m' \times n_-}$.

В силу сделанных выше предположений имеем, что $\text{rank } w_1 = \text{rank } w_1\phi = m$ и $\text{rank } w_2 = \text{rank } w_2\phi = m$ (блоки имеют полный ранг).

Действительно, если, например, $\text{rank } w_1$ был бы меньше m , то можно было бы перейти от выбранного базиса в W к другому, такому, что w_1 имел бы нулевой столбец, а, значит, $\dim W\phi \cap V_+ > 0$, что противоречило бы сделанному выше предположению. Значит, для новых троек (V, j, W) и $(V\phi, j\phi, W\phi)$ имеют место неравенства $n_+ \geq m$ и $n_- \geq m$.

В силу блочно-диагонального вида матрицы F уравнение $FA = AF$ переписывается в виде системы

$$\begin{cases} F_1 w_1 = w_1\phi \\ F_2 w_2 = w_2\phi \end{cases} \quad (2)$$

Покажем, что эта система уравнений всегда разрешима. Для этого положим

$$\begin{cases} F_1 = F_{11} F_{12} \\ F_2 = F_{21} F_{22} \end{cases}, \quad \text{где } F_{11}, F_{12} \hat{=} K^{n_+ \times n_+}, F_{21}, F_{22} \hat{=} K^{n_- \times n_-}.$$

Заметим, что при $i = 1, 2$ умножение w_i слева на F_{i2} есть составление невырожденных линейных комбинаций из строк матрицы w_i . Так как $\text{rank } w_i = m$, то существуют такие невырожденные F_{i2} , что

$$F_{12} w_1 = \begin{pmatrix} E_m \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_{22} w_2 = \begin{pmatrix} E_m \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Тогда, так как матрица T – невырожденная, а $\text{rank } w_i\phi = m$, то и $\text{rank } w_i\phi = m$ ($i = 1, 2$). Поэтому из (2) и (3) следует, что в качестве F_{i1} можно положить матрицу, первыми m столбцами которой является $w_i\phi$, а остальные столбцы — произвольное дополнение линейно-независимыми столбцами, такое, чтобы матрица F_{i1} была невырожденной ($i = 1, 2$).

Следовательно, найденные нами инварианты, действительно, образуют полную систему. Это завершает доказательство следующей теоремы.

Теорема (О полной системе инвариантов инволюций). Полная система инвариантов троек (V, j, W) с точностью до изоморфизма векторного пространства V есть шестерка $(n, n_+, n_-, m, \dim V \zeta V_+, \dim V \zeta V_-)$, где $n = \dim V, n_+ = \dim V_+, m = \dim W, n_- = \dim V_-, V_+ = \ker(j - \text{id}), V_- = \ker(j + \text{id})$.

Список цитированных источников

1. Аграчев, А.А. Геометрическая теория управления / А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков. – М.: Физматлит, 2005. – 392 с.

УДК. 511

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕРАВЕНСТВА НЕСБИТТА

Пригун Р.В.

Командно-инженерный институт МЧС РБ, г. Минск

Научный руководитель: Шамукова Н.В., к. физ.-мат. н., доцент

В 1905 г. английский математик Несбитт поставил следующую задачу: доказать, что для всех $x > 0, y > 0, z > 0$ выполняется неравенство $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$.

Неравенство Несбитта доказывается с использованием простейших алгебраических преобразований и теоремы Мюрхеда; неравенства Коши-Буняковского-Шварца; теоремы Йенсена; связи между средним арифметическим, средним геометрическим и средним гармоническим.

На математических олимпиадах различных уровней участникам предлагается доказать неравенства, являющиеся аналогами неравенства Несбитта. Также аналоги неравенства Несбитта, их доказательства и обобщения публикуются в различных математических журналах.

Теорема 1. [1] Пусть $x > 0, y > 0, z > 0$

$$\text{Тогда } \sqrt{\frac{x}{x+y}} + \sqrt{\frac{y}{y+z}} + \sqrt{\frac{z}{z+x}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

В статье [2] приводится доказательство неравенства, если $x > 0, y > 0, z > 0, a \geq \frac{1}{2}$,

$$\text{то } \frac{x}{x+y} \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{y}{y+z} \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{z}{z+x} \frac{1}{\sqrt{a}} \geq \frac{3}{2^a}.$$

Также выдвигается предположение, что справедливо неравенство:

$$\frac{x_1}{x_1+x_2} \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{x_2}{x_2+x_3} \frac{1}{\sqrt{a}} + \dots + \frac{x_n}{x_n+x_1} \frac{1}{\sqrt{a}} \geq \frac{n}{2^a}.$$

Были попытки доказать данное предположение, однако нам удалось доказать неравенство, состоящее из четырех слагаемых, но с менее точной оценкой:

$$\sqrt{\frac{x}{x+y}} + \sqrt{\frac{y}{y+z}} + \sqrt{\frac{z}{z+t}} + \sqrt{\frac{t}{t+x}} \geq 3\sqrt{2} - 1, \text{ где } x > 0, y > 0, z > 0, t > 0.$$

Теорема 2. Справедливо неравенство

$$\sqrt{\frac{x}{x+y}} + \sqrt{\frac{y}{y+z}} + \sqrt{\frac{z}{z+t}} + \sqrt{\frac{t}{t+x}} \geq 3\sqrt{2} - 1, \text{ где } x > 0, y > 0, z > 0, t > 0.$$

Доказательство.

Используя утверждение теоремы 1, получаем, что

$$\sqrt{\frac{x}{x+y}} + \sqrt{\frac{y}{y+z}} + \sqrt{\frac{z}{z+x}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$\sqrt{\frac{y}{y+z}} + \sqrt{\frac{z}{z+t}} + \sqrt{\frac{t}{t+y}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$\sqrt{\frac{z}{z+t}} + \sqrt{\frac{t}{t+x}} + \sqrt{\frac{x}{x+z}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$\sqrt{\frac{t}{t+x}} + \sqrt{\frac{x}{x+y}} + \sqrt{\frac{y}{y+t}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$2\left(\sqrt{\frac{x}{x+y}} + \sqrt{\frac{y}{y+z}} + \sqrt{\frac{z}{z+t}} + \sqrt{\frac{t}{t+x}}\right) \geq 6\sqrt{2} - \left(\sqrt{\frac{z}{z+x}} + \sqrt{\frac{x}{x+z}}\right)$$

$$- \left(\sqrt{\frac{t}{t+y}} + \sqrt{\frac{y}{y+t}}\right) \geq 6\sqrt{2} - 2$$

Докажем вспомогательное неравенство: $\sqrt{\frac{a}{a+b}} + \sqrt{\frac{b}{a+b}} \geq 1$

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b} \Leftrightarrow a + 2\sqrt{ab} + b \geq a + b \Leftrightarrow \sqrt{ab} \geq 0.$$

Тогда $\sqrt{\frac{x}{x+y}} + \sqrt{\frac{y}{y+z}} + \sqrt{\frac{z}{z+t}} + \sqrt{\frac{t}{t+x}} \geq 3\sqrt{2} - 1$.

Неравенство доказано.

Полученная оценка является менее точной, чем в статье [2].

Для этого сравним полученную нами оценку $3\sqrt{2} - 1$ и предложенную в статье [2]

оценку $\frac{4}{2^{\frac{1}{2}}}$.

Пусть $\frac{4}{2^{\frac{1}{2}}} < 3\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < 3\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{2}$.

Последнее неравенство очевидно. Значит, $\frac{4}{2^{\frac{1}{2}}} < 3\sqrt{2} - 1$.

Возможно при усовершенствовании подхода можно получить доказательство выдвинутого предположения в [2].

Список цитированных источников

1. Mihaly, Bencze Generalizations and refinements for Nesbitt's inequality / Bencze Mihaly, T. Pop Ovidiu // Journal of Mathematical Inequalities – 2011. – Vol. 5. – № 1. – С. 13–20.
2. Fuhua, Wei Generalizations and analogues of the Nesbitt's inequality / Wei Fuhua, Wu Shanhe // Octogon Mathematical Magazine. – 2009. – Vol. 17. – No. 1. – С. 215–220.

УДК 519.6+517.983

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ НЕЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА

Сахвон М.Н.

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина, г. Брест

Научный руководитель: Матысик О.В., к.физ.-мат.н., доцент

В действительном гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение первого рода $Ax = y$, где A – ограниченный положительный самосопряжённый оператор. Предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A , но не является его собственным значением, т.е. рассматриваемая задача неустойчива, и, значит, некорректна. Будем искать решение уравнения $Ax = y$, используя неявный метод итераций

$$(E + aA)x_{n+1} = (E - aA)x_n + 2ay, \quad x_0 = 0, \quad (1)$$

которая при приближённой правой части уравнения $Ax = y: y_d, \|y - y_d\| \leq d$ имеет вид

$$(E + aA)x_{n+1,d} = (E - aA)x_{n,d} + 2ay_d, \quad x_{0,d} = 0. \quad (2)$$

Справедлива

Теорема 1. Итерационный метод (2) при условии

$$a > 0$$

(3)

сходится.

Доказательство. По индукции легко проверить, что

$$x_n = A^{-1} \left[E - (E - aA)^n (E + aA)^{-n} \right] y.$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} x - x_n &= A^{-1} (E - aA)^n (E + aA)^{-n} y = \int_0^M \frac{a - aI}{eI + aI} \frac{\ddot{\circ}^n}{\varnothing} dE_1 y = \\ &= \int_0^e \frac{a - aI}{eI + aI} \frac{\ddot{\circ}^n}{\varnothing} dE_1 y + \int_e^M \frac{a - aI}{eI + aI} \frac{\ddot{\circ}^n}{\varnothing} dE_1 y. \end{aligned}$$

При $a > 0$ и $\lambda \hat{I} (0, M]$, где $M = \|A\|$, имеет место неравенство $\left| \frac{1 - aI}{1 + aI} \right| < 1$, и, следовательно, последний интеграл очевидным образом стремится к нулю по норме:

$$\left\| \int_e^M \frac{a - aI}{eI + aI} \frac{\ddot{\circ}^n}{\varnothing} dE_1 y \right\| \leq q^n \left\| \int_e^M \ddot{\circ}^{-1} dE_1 y \right\| = q^n \left\| \int_e^M \ddot{\circ} dE_1 x \right\| \leq q^n \|x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

(Здесь $\left| \frac{1 - aI}{1 + aI} \right| \leq q < 1, I \hat{I} [e, M]$).

$$\left\| \int_0^e \frac{a - aI}{eI + aI} \frac{\ddot{\circ}^n}{\varnothing} dE_1 y \right\| \leq \left\| \int_0^e \ddot{\circ}^{-1} dE_1 y \right\| = \left\| \int_0^e \ddot{\circ} dE_1 x \right\| = \|E_e x\| \rightarrow 0, \quad e \rightarrow 0.$$

Таким образом, при условии (4) $\|x - x_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, т.е. процесс (2) сходится при точной правой части y уравнения $Ax = y$. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим сходимость метода (3) при приближённой правой части y_d . Имеет место

Теорема 2. Если выбирать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ так, чтобы $nd \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, d \rightarrow 0$, то при условии (4) итерационный процесс (3) сходится.

Доказательство. Рассмотрим разность $x - x_{n,d} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,d})$. По доказанному в теореме 1 $x - x_n \in O(n^{-1})$. Покажем, что $x_n - x_{n,d}$ можно сделать сходящимися к нулю. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряжённого оператора A , получим $x_n - x_{n,d} = A^{-1} [E - (E - aA)^n (E + aA)^{-n}] (y - y_d) =$

$$\int_0^M \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \frac{d^n u}{dt^n} dt E_1 (y - y_d).$$

Оценим сверху положительную подынтегральную функцию

$$g_n(t) = \int_0^M \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \frac{d^n u}{dt^n} dt$$

при условии (4). Покажем по индукции, что

$$g_n(t) \leq 2na. \tag{5}$$

При $n = 1$ $g_1(t) = \frac{2a}{1 + a} \leq 2a$. Предположим, что (5) истинно при $n = k$, т.е.

$$g_k(t) = \int_0^M \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \frac{d^k u}{dt^k} dt \leq 2ka$$

и рассмотрим $n = k + 1$. Имеем

$$g_{k+1}(t) = \int_0^M \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \frac{d^{k+1} u}{dt^{k+1}} dt = \int_0^M \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \frac{d^k u}{dt^k} dt - \int_0^M \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \frac{d^k u}{dt^k} dt$$

$$\leq 2ka + \int_0^M \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \frac{d^k u}{dt^k} dt - \int_0^M \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \frac{d^k u}{dt^k} dt = 2ka + \frac{2a}{1 + a} \leq 2(k + 1)a.$$

Следовательно, оценка (5) справедлива для любого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда $\|x_n - x_{n,d}\| \leq 2nad$. Поскольку $\|x - x_{n,d}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,d}\| \leq \|x - x_n\| + 2nad$ и $\|x - x_n\| \in O(n^{-1})$, то для сходимости процесса (3) достаточно выбрать n в зависимости от δ так, чтобы $nd \in O(n^{-1})$, $n \in \mathbb{N}$, $d \in O(n^{-1})$. Теорема 2 доказана.

УДК 517.948

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ НЕКОТОРЫХ МНОГОШАГОВЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Стаин Т.С., Тузик А.С.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест
 Научный руководитель: В.М. Мадорский, к.физ.-мат.н., доцент

Решается нелинейное уравнение

$$f(x) = 0, f(D \subset R^n \rightarrow R^n), f \in C_D^2 \tag{1}$$

для решения которого предлагаются следующие квазиньютоновские нелокальные нерегуляризованные итерационные процессы.

Метод 1.

Шаг 1: Решается СЛАУ относительно поправки Δx_n

$$f'(x_n) \Delta x_n = -\sqrt{\beta_n} f(x_n), n = 0, 1, 2, \dots, \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}]. \tag{2}$$

Шаг 2: Вносится поправка в вектор x_n :

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n. \tag{3}$$

Шаг 3: Проверяется условие окончания вычислительного процесса:

если $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$, ε – параметр останова, то конец расчетов, иначе

Шаг 4: Вносится поправка в вычисление шаговой длины, если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} = 1$, иначе – шаговая длина определяется по формуле:

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\| \beta_n}\right), \gamma_0 = \beta_0^2, \quad (4)$$

Шаг 5: Решается СЛАУ с той же матрицей Якоби относительно поправки Δx_{n+1}

$$f'(x_n) \Delta x_{n+1} = -\sqrt{\beta_{n+1}} f(x_{n+1}). \quad (5)$$

Шаг 6: Уточняется вектор x_{n+1} :

$$x_{n+2} = x_{n+1} + \Delta x_{n+1} \quad (6)$$

Шаг 7: Проверяется условие окончания вычислительного процесса:

если $\|f(x_{n+2})\| < \varepsilon$, то конец расчетов, иначе

Шаг 8: Вносится поправка в вычисление шаговой длины, если $\|f(x_{n+2})\| < \|f(x_{n+1})\|$, то $\beta_{n+2} = 1$, иначе – шаговая длина определяется по формуле:

$$\beta_{n+2} = \min\left(1, \frac{\gamma_{n+1} \|f(x_{n+1})\|}{\|f(x_{n+2})\| \beta_{n+1}}\right), \gamma_{n+1} = \gamma_n \frac{\beta_{n+1} \|f(x_{n+1})\|}{\beta_n \|f(x_{n+2})\|}, \quad (7)$$

И осуществляется переход на Шаг 1.

Теорема 1. Пусть оператор f в интересующей нас области D удовлетворяет условиям:

Отображение f является G -дифференцируемым на выпуклом множестве D ,

$$\|f'(x)\| \leq M < +\infty \quad \forall x \in D, \|[f'(x)]^{-1}\| \leq B. \quad (8)$$

В D существует решение x^* уравнения (1), $K = \sup_{x \in D} \|f''(x)\|$ и $\varepsilon_0 = KB^2 \sqrt{\beta_0} \|f(x_0)\| < 1$.

Тогда итерационный процесс (2)–(7) сходится к решению уравнения x^* со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью, и оценка погрешности n -ого приближения имеет вид

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{B \|f(x_0)\| q_0^n}{1 - q_0}, \quad q_0 = 1 - \sqrt{\beta_0} (1 - \varepsilon_0).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|f(x_{n+1})\| &\leq \|f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\| + \sup_{0 \leq t \leq 1} \|f'(x_n + t\Delta x_n) - f'(x_n)\| \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq \|f(x_n) - \sqrt{\beta_n} f(x_n)\| + KB^2 \beta_n \|f(x_n)\|^2 = \left(1 - \sqrt{\beta_n} (1 - \varepsilon_n)\right) \|f(x_n)\| = q_n \|f(x_n)\|, \end{aligned} \quad (9)$$

здесь $\varepsilon_n = KB^2 \sqrt{\beta_n} \|f(x_n)\|$, $q_n = 1 - \sqrt{\beta_n} (1 - \varepsilon_n)$.

Нетрудно показать, что имеет место равенство

$$\sqrt{\beta_n} \|f(x_n)\| = \sqrt{\beta_{n+1}} \|f(x_{n+1})\| \quad (10)$$

Из условий теоремы и (10) следует, что все $\varepsilon_i = \varepsilon_0$ и, если β_0 и x_0 таковы, что $\varepsilon_0 = KB^2 \sqrt{\beta_0} \|f(x_0)\| < 1$, то $q_0 < 1$ и $\varepsilon_i = \varepsilon_0 < 1$. Пусть $n = 0$, тогда из (9) следует, что

$$\|f(x_1)\| \leq q_0 \|f(x_0)\| < \|f(x_0)\|, \quad (11)$$

и из (10) имеем, что

$$\sqrt{\beta_0} \|f(x_0)\| = \sqrt{\beta_1} \|f(x_1)\|. \quad (12)$$

Сравнивая (10) и (11), имеем, $\sqrt{\beta_0} < \sqrt{\beta_1}$ и $q_1 = 1 - \sqrt{\beta_1} (1 - \varepsilon_1) < 1 - \sqrt{\beta_0} (1 - \varepsilon_0) < q_0$.

Применяя метод математической индукции, получим, что последовательность $\{\beta_i\} \nearrow 1$, а последовательность $\{q_i\} \searrow 0$.

Переходя к пределу в (9) при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x_n)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n q_i \|f(x_0)\| = 0. \quad (13)$$

Таким образом, из (13) следует, что $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x^*) = 0$, тем самым сходимость итерационного процесса к решению доказана.

Покажем, что в процесса счета существует номер k_0 , что при $i \geq k_0$ все $\beta_i = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n \|f(x_0)\|^2}{\|f(x_{n+1})\|^2 \beta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{n-1} \|f(x_0)\|^2}{\|f(x_{n+1})\|^2 \beta_{n-1}} = \dots > +\infty. \quad (14)$$

Из (14) и (4) следует, что $\exists k_0$ такое, что для всех $i \geq k_0$ все $\beta_i = 1$. С этого момента процесс (2)–(7) переходит в классический метод Ньютона с характерной для него скоростью сходимости. Теорема доказана.

Метод 2.

Шаг 1: Решается СЛАУ относительно поправки Δx_n

$$f'(x_n) \Delta x_n = -\beta_n f(x_n), n = 0, 1, 2 \dots, \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}]. \quad (15)$$

Шаг 2: Производится уточнение вектора x_n :

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n \quad (16)$$

Шаг 3: Проверяется условие окончания вычислительного процесса:

если $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$, ε – параметр останова, то конец расчетов, иначе

Шаг 4: Вносится поправка в вычисление шаговой длины, если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} = 1$, иначе – шаговая длина определяется по формуле:

$$\beta_{n+1} = \min \left(1, \sqrt{\frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\beta_n^2 \|f(x_{n+1})\|}} \right), \gamma_0 = \beta_0^4, \quad (17)$$

Шаг 5: Решается СЛАУ с той же матрицей Якоби относительно поправки Δx_{n+1}

$$f'(x_n) \Delta x_{n+1} = -\beta_{n+1} f(x_{n+1}). \quad (18)$$

Шаг 6: Уточняется вектор x_{n+1} :

$$x_{n+2} = x_{n+1} + \Delta x_{n+1} \quad (19)$$

Шаг 7: Проверяется условие окончания вычислительного процесса:

если $\|f(x_{n+2})\| < \varepsilon$, то конец расчетов, иначе

Шаг 8: Вносится поправка в вычисление шаговой длины, если $\|f(x_{n+2})\| < \|f(x_{n+1})\|$, то $\beta_{n+2} = 1$, иначе – шаговая длина определяется по формуле:

$$\beta_{n+2} = \min \left(1, \sqrt{\frac{\gamma_{n+1} \|f(x_{n+1})\|}{\beta_{n+1}^2 \|f(x_{n+2})\|}} \right), \gamma_{n+1} = \gamma_n \frac{\beta_{n+1}^2 \|f(x_{n+1})\|}{\beta_n^2 \|f(x_{n+2})\|}. \quad (20)$$

И осуществляется переход на Шаг 1.

Относительно итерационного процесса (15)–(20) может быть сформулирована.

Теорема 2. Пусть оператор f в интересующей нас области D удовлетворяет условиям:

Отображение f является G -дифференцируемым на выпуклом множестве D ,

$$\|f'(x)\| \leq M < +\infty \forall x \in D, \|[f'(x)]^{-1}\| \leq B \quad (21)$$

В D существует решение x^* уравнения (1), $K = \sup_{x \in D} \|f''(x)\|$ и $\varepsilon_0 = KB^2 \beta_0 \|f(x_0)\| < 1$.

Тогда итерационный процесс (15) – (20) сходится к решению уравнения x^* со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью, и оценка погрешности n -ого приближения имеет вид

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{B \|f(x_0)\| q_0^n}{1 - q_0}, q_0 = 1 - \beta_0 (1 - \varepsilon_0).$$

Доказательство теоремы 2 вполне аналогично доказательству теоремы 1.

Процедуры, построенные на основе описанных выше двух многошаговых итерационных процессов, показали высокую эффективность.

Список цитированных источников

1. Жанлав, Т. О сходимости на основе непрерывного метода Ньютона / Т. Жанлав, И.В. Пузынин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1992. – Т. 32. – № 6. – С. 846–856.
2. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М.Мадорский. – Брест: БрГУ, 2005. – 186 с.

УДК 519.688:004.021

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ БАКТЕРИАЛЬНЫХ ПЛАЗМИД

Швычкина Е.Н.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Математическое моделирование динамики развития двух видов микроорганизмов, потребляющих один субстрат, является актуальной задачей и его развитие в виде различных модификаций содержится, например, в работе [1]. Одной из таких актуальных модификаций является конкуренция плазмидосодержащих и бесплазмидных клеток микроорганизма. Известно [2], что микроорганизмы претерпевают изменения посредством действия *плазмид* – молекул ДНК. В репродуктивном процессе клеток организмов плазмиды могут быть потеряны, что приводит к возникновению в организме плазмидосодержащих и бесплазмидных клеток и в зависимости от способа культивирования клеток можно предопределить свойство полученного микроорганизма.

Для описания динамики нестабильных штаммов микроорганизмов наиболее продуктивное развитие получила модель, разработанная и проанализированная Ф.Стюартом и Б.Левиным [2]

$$s'(t) = (s_0 - s(t))D - \frac{m_1 x_1(t)s(t)}{a_1 + s(t)} - \frac{m_2 x_2(t)s(t)}{a_2 + s(t)}, \quad (1)$$

$$x_1'(t) = \frac{qm_1(1-q)s(t)}{a_1 + s(t)} - D \frac{\ddot{x}_1(t)}{\ddot{\varnothing}}, \quad x_2'(t) = \frac{qm_1s(t)x_1(t)}{a_1 + s(t)} + \frac{m_2s(t)x_2(t)}{a_2 + s(t)} - Dx_2(t),$$

где $x_1(t)$ плотность плазмидосодержащего и $x_2(t)$ плотность бесплазмидного микроорганизма в момент времени t ; $s(t)$ обозначает плотность питательного субстрата; параметр D - называется потоком, и он численно равен скорости подачи питательного субстрата в ферментер; параметры a_i ($i=1,2$) - постоянные равные концентрации субстрата, при которых удельная скорость роста микроорганизма равна половине максимальной (константы Михаэлиса-Ментен); m_i ($i=1,2$) - максимальная скорость роста i -го микроорганизма; q - вероятность образования бесплазмидных клеток при делении плазмидосодержащих клеток.

В работе решается следующая задача: построить программные модули, позволяющие моделировать свойства решений системы (1), которая удовлетворяет начальным условиям $s(0) = s_0 \geq 0$, $x_1(0) = x_{10} \geq 0$, $x_2(0) = x_{20} \geq 0$, в зависимости от значений входящих параметров. Для решения этой задачи будем использовать метод, рассмотренный в работе [3]. А именно, для системы (1) рассмотрим случай, когда параметры удовлетворяют условию $a_1 = a_2$. В этом случае система (1) может быть редуцирована к дифференциальному уравнению первого порядка относительно функции $x_1(t)$:

$$x_1'(t) = x_1(t) \frac{qm_2(1-q)(1-r)(c_1e^{-Dt} + s_0 - ry_2x_1(t) - c_2e^{-Dy_1t}x_1^{y_1+1}(t))}{c_1e^{-Dt} + a_2 + s_0 - x_1(t) + q(1-r)y_2x_1(t) - c_2e^{-Dy_1t}x_1^{y_1+1}(t)} - D \frac{\ddot{x}_1(t)}{\ddot{\varnothing}} \quad (2)$$

где $y_1 = \frac{1}{(1-q)(1-r)} - 1$, $y_2 = \frac{1}{q+r-qr}$. Функции $s(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ связаны следующими функциональными соотношениями

$$s(t) = s_0 + e^{-tD} c_1 - x_1(t) - x_2(t),$$

$$x_2(t) = c_2 e^{(1/(1-q)(1-r)-1)tD} x_1^{1/(1-q)(1-r)}(t) - \frac{q(1-r)x_1(t)}{q+r-qr}, \quad (3)$$

где c_1, c_2 - произвольные постоянные.

Используя СКА *Mathematica*, проведем численное исследование решений дифференциальной системы (1). Для этого построим программный модуль, который решает дифференциальное уравнение (2) и, используя соотношения (3), осуществляет моделирование возможных состояний динамической системы (1) для различных значений входящих в нее параметров. На рисунке 1 показаны графики, входящих в систему (1) трех неизвестных функций $s(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$. Изменяя положения ползунков, можно задать желаемое значение параметров системы (1).

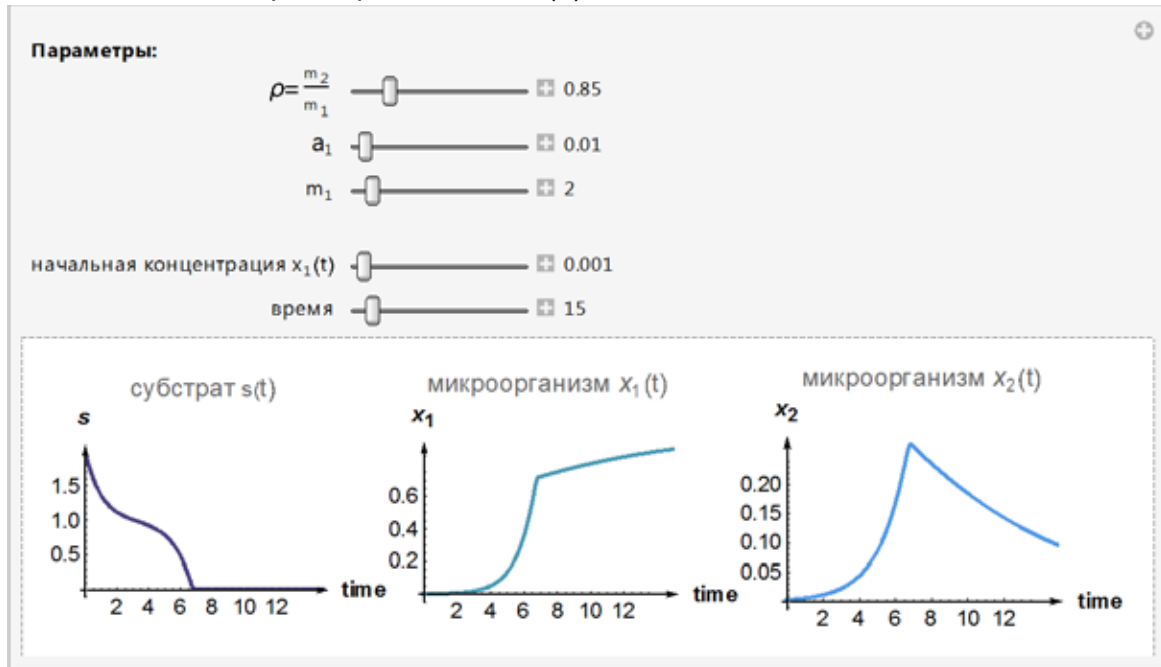


Рисунок 1

Список цитированных источников

1. Smith, H.L. The theory of chemostat: dynamics of microbial competition / H.L. Smith, P. Waltman. – Cambridge University Press, 1995. – 313 p.
2. Levin, B.R. The Population Biology of Bacterial Plasmids: a priori Conditions for the Existence of Mobilizable Non-conjugative Factors / B.R. Levin, F.M. Stewart // Genetics. – 1980. – Vol. 94. – № 2. – P. 425–443.
3. Чичурин, А.В. Моделирование хемостата популяционной динамики бактериальных плазмид // А.В. Чичурин, Е.Н. Швычкина // Весн. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 3. – С. 59–65.

УДК 517.583

ПОСТРОЕНИЕ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ, НЕОГРАНИЧЕННОЙ ВНЕ ОКРЕСТНОСТЕЙ СВОИХ ПОЛЮСОВ

Юхимук М.М.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Пусть $f(z)$ – заданная мероморфная функция, нули которой находятся в точках $a_j (j \in \mathbb{N})$, а полюсы – в точках $b_k (k \in \mathbb{N})$. При этом $\inf_{a_{j_1} \neq a_{j_2}} |a_{j_1} - a_{j_2}| = d_a > 0$,

$\inf_{b_{k_1} \neq b_{k_2}} |b_{k_1} - b_{k_2}| = d_b > 0$. Фиксируем число $d < \frac{1}{2} \min\{d_a, d_b\}$ и образуем множество

$W_d = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_d(a_j) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} U_d(b_k)$. Пусть $(I_n)_{n=1}^{\infty} \subset W_d \setminus \{0\}$ – произвольная неограниченная последовательность. Поставим задачу построения неограниченной на

последовательности $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ мероморфной функции $j(z)$, нули и полюсы которой совпадают соответственно с нулями и полюсами функции $f(z)$ (с учетом их кратностей).

Пусть $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ – произвольная неограниченная последовательность. Будем искать мероморфную функцию вида $j(z) = \exp(y(z))\chi(z)$, где $y(z)$ – целая функция,

удовлетворяющая условию $n \hat{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_n}{k I_n^k} = \ln \frac{g_n}{f(I_n)}$. Для этого построим сначала целую функцию $y_0(z)$, имеющую простые нули в точках $I_n (n \hat{=})$:

$$y_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{I_n} \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k I_n^k} \quad (\text{числа } p_n \hat{=} 0 \text{ подбираются таким образом, чтобы}$$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n + 1} \left| \frac{z}{I_n} \right|^{p_n + 1}$ сходилась при любом z). Тогда, согласно [2, с. 36], функция $y(z)$

запишется в виде: $y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{g_n}{f(I_n)} \frac{1}{z - I_n} \frac{z}{z - I_n} y_0(z)$, где числа $m_n \hat{=} 0$ являются наименьшими, удовлетворяющими условию

$$d > 1 \quad n^3 N \left| \ln \frac{g_n}{f(I_n)} \frac{1}{z - I_n} \frac{z}{z - I_n} \right| \left| \frac{\ln |I_n|}{I_n} \right|^{m_n} < \frac{1}{n^d} \quad (1)$$

Так как функция $\exp(y(z))$ является целой и нигде не обращается в нуль, то функция $j(z) = \exp(y(z))\chi(z)$ является мероморфной, имеет те же нули и полюсы, что и

$$\begin{aligned} \text{функция } f(z) \text{ и при любом } n \hat{=} j(I_n) &= \exp(y(I_n))\chi(I_n) = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_n}{k f(I_n)^k} \chi(I_n) = \\ &= \frac{g_n}{f(I_n)} \chi(I_n) = g_n \end{aligned}$$

Поскольку последовательность $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ является неограниченной, то построенная функция $j(z)$ является неограниченной на множестве W_d (то есть вне окрестностей своих полюсов).

В качестве примера рассмотрим нигде не обращающуюся в нуль мероморфную

$$\text{функцию } f(z) = \frac{1}{p^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{1}{\sin^2 pz}$$

с полюсами второго порядка в точках $z = n (n \hat{=})$. В [3] показано, что функция такого вида является ограниченной вне δ -окрестностей своих полюсов при любом сколь угодно малом $d > 0$. образуем последовательность $(I_n)_{n=1}^{\infty}$, расположив элементы множества $\{n - 1/2 | n \hat{=} }\mathbb{Z}\}$ в порядке неубывания их модулей: $I_1 = 1/2, I_2 = -1/2, I_3 = -3/2, I_4 = 3/2, \dots$ Построим целую функцию $y_0(z)$, для которой числа $I_n (n \hat{=})$ являются простыми нулями.

Поскольку показатель сходимости последовательности $(I_n)_{n=1}^{\infty}$

$$\lambda = \inf_n \left\{ n \hat{=} \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|I_n|^n} < +\infty \right\} = \inf_n \left\{ n \hat{=} \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n-1/2)^n} < +\infty \right\} = 1, \text{ то, следуя [1, с. 168],}$$

достаточно положить $y_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \exp\left(\frac{z}{n-1/2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \exp\left(\frac{z}{n-1/2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \exp\left(\frac{z}{n-1/2}\right) = \dots$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \exp\left(\frac{z}{n-1/2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \exp\left(\frac{z}{n-1/2}\right) = \dots$$

$$= \sin(p(z+1/2)) = \sin(p/2 + pz) = \cos pz. \quad \text{Поскольку } f(n-1/2) = \frac{1}{\sin^2(pn-p/2)} =$$

$\frac{1}{\cos^2 pn} = 1$, то $f(I_n) = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Так как $y_0(z) = -p \sin pz$, причем $y_0(n-1/2) = -p \sin(pn-p/2) = p \cos pn = p(-1)^n$, то и $y_0(I_n) = p(-1)^n$. Тогда, например, для неограниченной последовательности $g_n = \exp(n)$ получим:

$$y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln g_n}{p(-1)^n} \frac{\cos pz}{z - I_n} = \frac{\cos pz}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln g_n}{z - I_n}. \quad \text{В этом случае условие (1)}$$

примет вид: $d > 1 \Rightarrow n^3 N \frac{\ln |n-1/2|}{n-1/2} < \frac{1}{n^d}$. Можно доказать, что, с

одной стороны, при $m = 2$ ($n \in \mathbb{N}$) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln |n-1/2|}{n-1/2}$ расходится, то есть не

может мажорироваться сходящимся рядом Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^d}$, а с другой – что при $d = 1,1$

неравенство $\frac{n \ln |n-1/2|}{n-1/2} < \frac{1}{n^d}$ справедливо уже для $m = 3$ ($n \in \mathbb{N}$). Поэтому,

окончательно, $y(z) = \frac{\cos pz}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln g_n}{z - I_n}$. При этом мероморфная функция

$j(z) = \frac{\exp(y(z))}{\sin^2 pz}$, имея те же полюсы, что и функция $f(z)$, будет удовлетворять условию $j(I_n) = \exp(n) \neq 1$.

Список цитированных источников

1. Бицадзе, А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1969. – 240 с.
2. Леонтьев, А.Ф. Ряды полиномов Дирихле и их обобщения / А.Ф. Леонтьев // Труды МИАН СССР. – 1951. – Т 39. – С. 3–214.
3. Юхимук, М.М. О вариациях полюсов эллиптических функций / М.М. Юхимук // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Я. Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і ўпраўленне. Біялогія. – 2010. – №2 (96). – С. 4–9.

СОДЕРЖАНИЕ

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ.
СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ РОБОТОТЕХНИКИ.
АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Vaitsekhovich L. Computer Network Security Approach Based on Multi-agent Dynamic Recognition	3
Артеменко С.В. Сравнительный анализ методов обработки электроэнцефалограмм для диагностики эпилепсии	6
Гилевский К.А. (Науч. рук. Курочка К.С., к.т.н., доц.) Интеллектуальная система анализа оформления текстовых документов в формате docx	8
Драко А.М. Применение нейронных сетей для декодирования блочных кодов	10
Крощенко А.А. (Науч. рук. Головкин В.А., д.т.н., проф.) Применение нейронных сетей глубокого доверия в интеллектуальном анализе данных	12
Постоялкин Д.С., Полейчук В.А. (Науч. рук. Курочка К.С., к.т.н., доц.) Система определения сорта растения по форме листа	15
Савицкий А.Ю., Савицкий Ю.В. Адаптивное обучение сигмоидальных нейроэлементов в архитектуре многослойной нейронной сети	16
Швецова Е.В. Особенности применения интеллектуальных информационных технологий в организациях различного типа	18
Черкас А.Л. (Науч. рук. Курочка К.С., к.т.н., доц.) Голосовое управление микроконтроллерами на базе платформы Arduino	19
Антоник И.А. (Науч. рук. Хведчук В.И., к.т.н., доц.) Подход к методу конечных разностей для анализа механических свойств топологии электронных приборов	21
Деревянко Д.В., Абрамов Е.С., Гетиков Д.В., Ковалёв Д.П. (Науч. рук. Сукач Е.И., к.т.н., доц.) Один из подходов к оценке вероятностных характеристик потоковых систем	23
Занько О.С., Рачковская П.Д. (Науч. рук. Муравьев Г.Л., к.т.н., доц.) К оценке характеристик стохастических сетей	25
Карнаухов Н.С. (Науч. рук. Капустин А.Г., к.т.н., доц.) Моделирование перспективных систем регулирования напряжения авиационных генераторов в среде MATLAB	26
Кондратович Е.В., Гилевская Л.С. (Науч. рук. Малюгин В.И., к.ф.-м.н., доц.) Прогнозирование циклических изменений на основе опережающих индикаторов	29
Меньших Т.Ю. (Науч. рук. Дереченник С.С., к.т.н., доц.) Генераторы псевдослучайных чисел для криптографической защиты канала связи	31

ЭЛЕКТРОННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
В НАУЧНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ РАЗРАБОТКАХ

Аверина И.Н., Голец О.В. Автоматизация системы бюджетирования на примере модуля «Управление бюджетами» системы «Галактика ERP»	35
Беглякова М.С. (Науч. рук. Шамукова Н.В., к.ф.-м.н., доц.) Прогнозирование чрезвычайных ситуаций с использованием информационных технологий	37
Гутников В.С., Тузик И.В. Программное средство для представления некоторых булевых функций в одноэлементном базисе	39
Давыдовский С.В. (Науч. рук. Лещев А.Е., к.т.н.) Использование технологии Content Security Policy для защиты пользователей Web-приложений	40
Дулуб В.В. (Науч. рук. Мухов С.В., к.т.н., доц.) Типизация формирования печатных форм для систем экономической направленности	42
Кисель Н.В. (Науч. рук. Хвещук В.И., к.т.н., доц.) Вопросы оценки жизненного цикла АСОИ	43
Котко Т. В. (Науч. рук. Аверина И.Н.) Методика автоматизации учета в соответствии с МСФО для филиала «Слонимская МПМК-164» ООО «Гродноблсельстрой»	45
Латий О.О. (Науч. рук. Костюк Д.А., к.т.н., доц.) Инструментальная оценка эффективности пользовательского взаимодействия с интерфейсом офисных пакетов	47
Марциновский С.А., Тузик И.В., Хомицкая Т.Г. Реализация решения в вычислительных средах задачи составления расписания горячей обработки деталей	50

Николайчук Д.В. (Науч. рук. Аверина И.Н.) Экаунтология о методах компьютерного учета	52
Перцев Д.Ю. (Науч. рук. Дудкин А.А., д.т.н., доц.) Основные подходы к сжатию гиперспектральных данных	54
Романовский К.В. (Науч. рук. Дудкин А.А., д.т.н., доц.) Структура мобильного приложения для экспресс-анализа состояния растительности по изображениям	57
Согоян А.Л. Аспекты компьютерной безопасности при проектировании системы приоритетного движения через перекрестки транспортных средств оперативного назначения.....	59
Шахно М.И. (Науч. рук. Козинский А.А., к.п.н., доц.) Реализация отказоустойчивости высоконагруженных систем.....	60

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Leschov A., Minchenko L. Directional Derivatives of Value Functions in Parametric Nonlinear Programming	62
Аксамит М.В., Былинович В.Н. (Науч. рук. Стройникова Е. Д.) Простые числа Мерсенна.....	64
Грицук Д.В. О конечной π -разрешимой группе со сверхразрешимой π -холловой подгруппой.....	66
Даудов Д.Д. (Науч. рук. Трофимук А.А., к.ф.-м.н., доц.) Разрешимые группы с силовскими подгруппами кофакторов фиксированного нормального ранга	66
Дорогокупец П.И. (Науч. рук. Матысик О.В., к.ф.-м.н., доц.) Оценки погрешностей в неявном процессе итераций решения уравнений I рода	67
Жук А.И. Ассоциированные решения систем неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами.	69
Завадский А.Ф. (Науч. рук. Юдов А.А., к.ф.-м.н., доц.) Инвариантные характеристики подгрупп Ли группы Ли движений четырехмерного евклидова пространства	71
Зацепина Е.В., Гарчук И.М. (Науч. рук. Высоцкий О.А., д.э.н., проф.) Метод экспертных оценок в измерении и анализе уровней управляемости маркетинговой деятельности организации	74
Кофанов В.А., Хомицкая Т.Г. Определение коэффициентов кубических сплайнов в MathCAD	77
Кучейко О.В. (Науч. рук. Худяков А.П., к.ф.-м.н.) О погрешности Эрмита интерполирования по системам рациональных функций	80
Липовцев А.П., Гладкий И.И., Каримова Т.И. (Науч. рук. Махнист Л.П., к.т.н., доц.) О функции распределения закона Пуассона и некоторых числовых последовательностях	82
Маркина А.А. (Науч. рук. Тарасюк Н.П.) Применение метода матриц переноса для расчета волноводов	85
Мархель М.А. (Науч. рук. Матысик О.В., к.ф.-м.н., доц.) Априорный выбор числа итераций в неявном итерационном методе решения некорректных задач	88
Минзер Е.И. (Науч. рук. Матысик О.В., к.ф.-м.н., доц.) Сходимость в гильбертовом пространстве двухшаговой процедуры явного типа решения линейных уравнений	89
Наумовец С.Н. (Науч. рук. Корзюк В.И., д.ф.-м.н., проф.) Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с производной второго порядка в граничных условиях.....	90
Пирштук Д.И. (Науч. рук. Дубров Б.М., к.ф.-м.н., доц.) О полной системе инвариантов инволюций	94
Пригун Р.В. (Науч. рук. Шамукова Н.В., к.ф.-м.н., доц.) Исследование неравенства Несбитта....	96
Сахвон М.Н. (Науч. рук. Матысик О.В., к.ф.-м.н., доц.) Регуляризация некорректных задач с помощью неявного итерационного метода	98
Стаин Т.С., Тузик А.С. (Науч. рук. Мадорский В.М., к.ф.-м.н., доц.) Об эффективности некоторых многошаговых методов решения нелинейных уравнений.....	99
Швычкина Е.Н. Численно-аналитическое исследование систем популяционной динамики бактериальных плазмид	102
Юхимук М.М. Построение мероморфной функции, неограниченной вне окрестностей своих полюсов.....	103

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

Сборник материалов IX Республиканской научной конференции
молодых ученых и студентов
19–21 ноября 2015 года

Ответственный за выпуск: **Махнист Л.П.**
Редактор: **Боровикова Е.Л.**
Компьютерная вёрстка: **Романюк И.Н.**
Корректор: **Никитчик Е.В.**

ISBN 978-985-493-343-6



Издательство БрГТУ.

Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя печатных
изданий № 1/235 от 24.03.2014 г.

Подписано к печати 12.11.2015 г. Формат 60×84 1/16.

Бумага «Снегурочка». Гарнитура «Arial Narrow». Усл.п.л. 6,3.

Уч.-изд. л. 6,75. Тираж 45 экз. Заказ № 1175.

Отпечатано на ризографе Учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, Брест, ул. Московская, 267.